Integrazione per parti

$$\int_a^b f(x)\, G(x) = \Big[F(x)\, G(x) \Big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b F(x)\, g(x)\, dx$$

(dove $F' = f$, $G' = g$)

<u>Dim.</u> Basta notare che (derivata del prodotto)

$$\frac{d}{dx}\big(F(x)\, G(x)\big) = F'(x)\, G(x) + F(x)\, G'(x) = \underbrace{f(x)\, G(x) + F(x)\, g(x)}_{\otimes}$$

$\Rightarrow$ $F(x)\, G(x)$ è primitiva di $\otimes$, quindi per il t. calcolo integrale

$$\int_a^b f(x)\, G(x)\, dx + \int_a^b F(x)\, g(x) = \Big[F(x)\, G(x) \Big]_{x=a}^{x=b}$$

se porto il secondo termine a destra trovo la formula.

Esempi

(1)

$$\int \ln(x)\,dx = \int \underset{f(x)}{1}\cdot\underset{G(x)}{\ln(x)}\,dx = \underset{F(x)G(x)}{x\ln(x)} - \int \underset{F(x)g(x)}{x\,\frac{1}{x}}\,dx =$$

$$\left(F(x) = x \qquad g(x) = \frac{1}{x} \right)$$

$$= x\ln(x) - x + \text{cost}.$$

> $\int P(x)\ln x\,dx$
>
> con lo stesso metodo $(\dots)$

(2)

$$\int \underset{G}{x^2}\,\underset{f}{e^x}\,dx = (\text{per parti}) = x^2 e^x - \int 2x\,e^x\,dx = \left(\begin{array}{c}\text{di nuovo}\\ \text{per parti}\end{array}\right)$$

$$\left(F = e^x ,\ g = 2x \right)$$

$$= x^2 e^x - 2x\,e^x + \int 2\,e^x\,dx = \left(x^2 - 2x + 2\right)e^x + \text{cost}.$$

Questo esempio si generalizza:

$$\int P(x)\,e^{ax}\,dx \qquad P \text{ polinomio} \qquad a \in \mathbb{R} \qquad a \neq 0$$

Se integro per parti trovo

$$\int \underset{\substack{\uparrow \\ f}}{P(x)}\ \underset{\substack{\uparrow \\ G}}{e^{ax}}\,dx = P(x)\frac{e^{ax}}{a} - \int \underbrace{\frac{P'(x)}{a}}\, e^{ax} = \ldots -$$

polinomio di grado più basso.

Dopo un numero finito di passi trovo

$$= \text{polinomio} \cdot e^{ax} + \text{cost}.$$

Allora posso anche dire che

$$\int P(x)\, e^{ax}\, dx = Q(x)\, e^{ax}$$ dove Q è un polinomio dello stesso grado di P. Q deve verificare

(*) $$a\,Q(x) + Q'(x) = P(x)$$

Per esempio $\int (x^2+5)\,e^{-x}\,dx = Q(x)\,e^{-x}$ $(a=-1)$

dove $Q(x) = ax^2 + bx + c$ $\rightarrow Q + Q' = x^2+5$

$$-ax^2 - bx - c + 2ax + b = x^2 + 5$$

$a = -1 \quad ; \quad -b-2=0 \quad b=-2 \quad ; \quad -c-2=5 \quad c=-7$

$$\int (x^2+5)e^{-x}\,dx = -(x^2+2x+7)e^{-x} + \text{cost.}$$

(1') $\displaystyle\int P(x)\ln(x)\,dx = ⍟$ $\quad P$ polinomio di grado n

si trova $P_1(x)$ di grado $n+1$ tale che $P_1' = P$
$(P(0)=0)$

$$⍟ = P_1(x)\ln(x) - \int \underbrace{\frac{P_1(x)}{x}}_{\text{polinomio di grado } n} dx$$

$\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\,dx$ $\quad$ (potrei usare la sostituzione $x = 2\sin(t)$)

Usiamo un altro metodo: $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \int \frac{4-x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx =$

$$\frac{\cancel{4}\,2}{\cancel{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} + \int \underset{\uparrow\atop G}{\frac{x}{2}} \left(\frac{-2x}{\underset{\uparrow\atop f}{\sqrt{4-x^2}}}\right) dx = 4\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) +$$

$$\left(F(x) = 2\sqrt{4-x^2} \qquad \left(F'(x) = 2\,\frac{-\cancel{2}\,x}{\cancel{2}\sqrt{4-x^2}} = \frac{-2x}{\sqrt{4-x^2}} \right)\right)$$

$$+\ \frac{x}{\cancel{2}}\,\cancel{2}\sqrt{4-x^2} - \int \frac{1}{\cancel{2}}\,\cancel{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

DUNQUE

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = 4\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + x\sqrt{4-x^2} - \int\sqrt{4-x^2}\,dx \iff$$

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = 2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + \text{cost}.$$

Lo stesso metodo si può usare per $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$

(che volendo si fa con la sostituzione $x = a\,\text{arcsinh}(t)$)

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \text{arcsinh}(x) + \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$= \text{arcsinh}(x) + \int \underset{G}{\underset{\uparrow}{x}}\ \underbrace{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}_{f}\,dx =$$

$$F(x) = \sqrt{1+x^2}\ ;\ F'(x) = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \operatorname{arcsinh}(x) + x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}\,dx \iff$$

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}(x) + \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \text{cost.}$$

NOTA le due funzioni arcsinh, arccosh sono esprimibili tramite il logaritmo: CASO DEL $\sinh(x)$.

$$y = \operatorname{arcsinh}(x) \iff \sinh(y) = x \iff$$

$$e^{y} - e^{-y} = 2x \iff \text{(moltiplico per } e^{y} \neq 0\text{)}$$

$$e^{2y} - 1 = 2x\,e^{y} \iff e^{2y} - 2x\,e^{y} - 1 = 0$$

se $t = e^{y}$ viene $t^2 - 2x\,t - 1 = 0 \iff$

$t_{12} = x \pm \sqrt{x^2+1}$ uno positivo e uno negativo

se per es. $x \geq 0 \Rightarrow x + \sqrt{1+x^2} \geq 0$, $x - \sqrt{1+x^2} \leq 0$ ← NON È e^{y} $\Rightarrow$

se $x \geq 0$ $\operatorname{arcsinh}(x) = y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$]

anche se $x < 0$ la radice positiva è $x + \sqrt{1+x^2}$

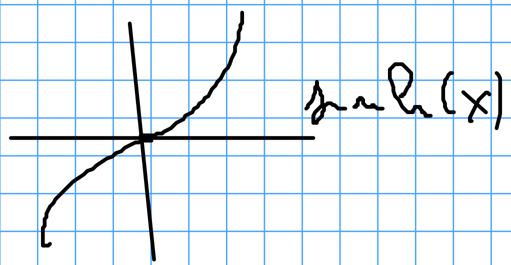
Quindi $\forall x$ $\boxed{\operatorname{arcsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)}$

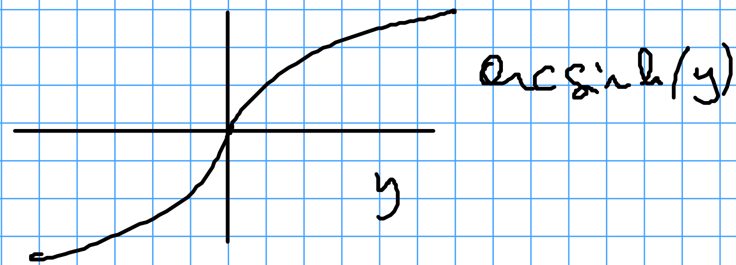
<u>NOTA</u> che se $x < 0$

$$\operatorname{arcsin}(x) = \ln\left(-|x| + \sqrt{1+|x|^2}\right) = \ln\left(\frac{1 + \cancel{|x|^2} - \cancel{|x|^2}}{|x| + \sqrt{1+|x|^2}}\right) =$$

$$- \ln\left(|x| + \sqrt{1+|x|^2}\right) = - \operatorname{arcsinh}(|x|)$$

DISPARI





$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

f INTEGRABILE

(a) F è lipschitziana : $\boxed{|F(x_1) - F(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|}$

dove $L = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ (finito per l'ipotesi di integrabilità)

additività

Infatti $|F(x_1) - F(x_2)| = \left| \int_a^{x_1} f(t)\,dt - \int_a^{x_2} f(t)\,dt \right| =$

$x_1 < x_2 \Big\}$ $= \left| \cancel{\int_a^{x_1} f(t)\,dt} - \left(\cancel{\int_a^{x_1} f(t)\,dt} + \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \right) \right| =$

$\left| -\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \right| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\,dt \leq \int_{x_1}^{x_2} L\,dt$

$= L(x_2 - x_1) = L|x_2 - x_1|$ <u>TESI</u>

(b) suppongo f continua; voglio dim. $F' = f$.

Prendiamo $x_0 \in [a,b]$. $x \neq x_0$

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt =$$

$$\cancel{\int_a^{x_0} f(t)\,dt} + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \cancel{\int_a^{x_0} f(t)\,dt} = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

Passo al rapporto incrementale

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$ = media integrale di f nell'interv. di estremi x e x_0, sia che $x > x_0$ sia che $x_0 > 0$

$=$ (t. della media integrale) $= f(\xi_x)$ per un opportuno ξ_x compreso tra x e x_0

Se $x \to x_0 \Rightarrow \xi_x \to x_0$ (due carabinieri) $\Rightarrow f(\xi_x) \xrightarrow{(f \text{ continua})} f(x_0)$

DUNQUE

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0) \quad \text{cioè} \quad F'(x_0) = f(x_0)$$

TESI

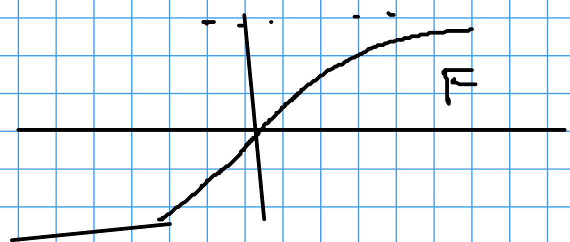
DUNQUE OGNI FUNZIONE CONTINUA f HA UNA PRIMITIVA $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

Questo non significa che posso "calcolare" tale primitiva

Per es. $f(x) = e^{-x^2}$ HA PRIMITIVE MA NON SO ESPRIMERLE MEDIANTE LE "FUNZIONI ELEMENTARI"

CIÒ NONOSTANTE POSSO STUDIARE $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$

$F(0) = 0$, $F' = e^{-x^2}$



?, ?, ?

Esempio $\quad G(x)=\int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt = F(x^2) \quad$ dove $F(y)=\int_0^y e^{-t^2}dt$

Cerchiamo di studiare $G(x)$.

(1) DOMINIO per quali x la funzione $t \mapsto e^{-t^2}$ è integrabile su $[0, x^2]$? Risposta: $\forall x$

$\text{Dom}(G) = \mathbb{R}$

(2) G è pari: $G(-x) = \int_0^{(-x)^2} e^{-t^2}dt = \int_0^{x^2} e^{-t^2}dt = G(x)$

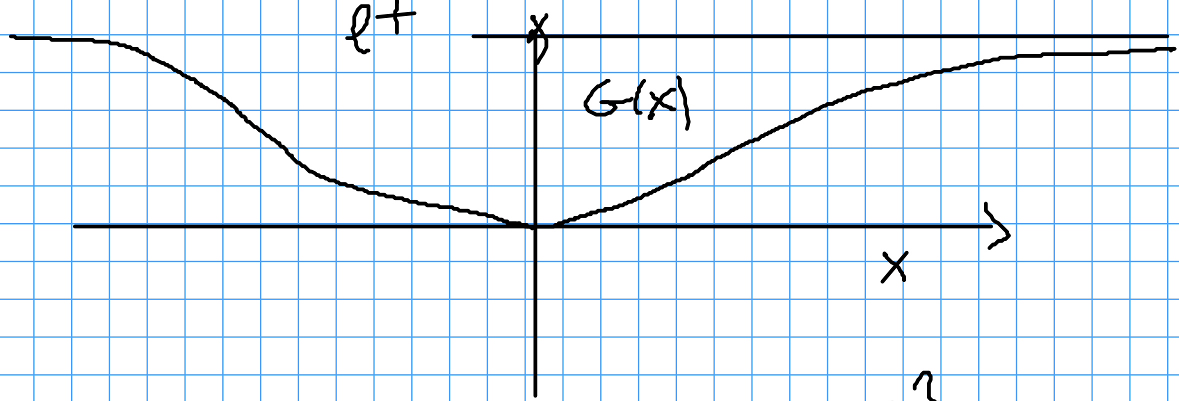
(3) $G(0) = \int_0^{0^2} e^{-t^2}\,dt = 0$

(4) limiti a $\pm\infty$??

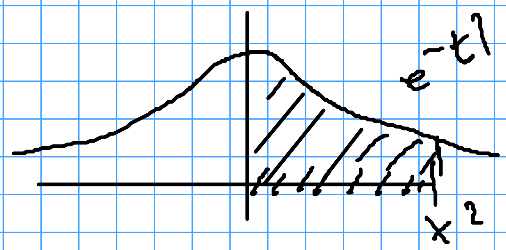
(5) $G'(x) = \frac{d}{dx} F(x^2) = F'(x^2)\cdot 2x = e^{-t^2}\Big|_{t=x^2} \cdot 2x$

$= 2x\, e^{-x^4}$ $\quad \left(G' > 0, \quad G'(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0 \quad (\text{"velocemente"}) \right)$

Se do per buono che $\lim_{x \to \pm\infty} G(x)$ esistono finiti



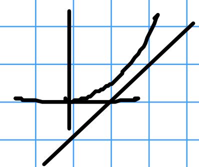
(4) Noto che $x \to \int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt$ <u>CRESCENTE</u> su $x \geq 0$



$$\boxed{\ell^+ < e \quad \text{vedi} \downarrow}$$

$\Rightarrow \exists \lim_{x \to +\infty} G(x) = \ell_+$ Voglio dim. che $\ell_+ < +\infty$

$$\int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt \leq \int_0^{x^2} e^{1-t}\,dt = \qquad t^2 \geq t-1$$



$$= e\int_0^{x^2} e^{-t}\,dt = e\left[-e^{-t}\right]_0^{x^2} = e\left(-e^{-x^2}+1\right) \leq \boxed{e}$$