I° Teorema

Do per buono che $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$

converge assolutamente per ogni t e che $f(t)$ è continua. Voglio dim la ($\star$)

Prendiamo $h(t)$ continua, $a < b$ numeri reali

Chiamo $f_n(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(k\omega t)$

(so che $f_n(t) \to f(t)$ $\forall t$). Allora

$$\left| \int_a^b f(t) h(t)\, dt - \int_a^b f_n(t) h(t)\, dt \right| =$$

$$\left| \int_a^b \left(f(t) - f_n(t)\right) h(t)\, dt \right| = \left| \int_a^b \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right) h(t) \right|$$

$$\leq \int_a^b \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right| \left| h(t) \right| dt \leq$$

$$\leq \int_a^b \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(|a_n| + |b_n|\right)}_{\to 0 \text{ se } n \to +\infty} \cdot \max_{[a,b]} |h| \, dx$$

$\to 0$ se $n \to +\infty$ (perché $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| < +\infty$)

quindi $\int_a^b f_n(t)\, h(t)\, dt \longrightarrow \int_a^b f(t)\, h(t)\, dt$ se $n \to \infty$

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cos(n\omega t) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(n\omega t) \right) h(t)\, dt =$$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b h(t) \cos(n\omega t)\, dt + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_a^b h(t) \sin(n\omega t)\, dt}$$

tende a $\int_a^b f(t)\, h(t)\, dt$

Osservazione $\int_0^T \sin(n\omega t) \sin(m\omega t)\, dt =$ (per parti)

$$\underbrace{\left[\sin(n\omega t) \left(\frac{-\cos(m\omega t)}{m\omega} \right) \right]_0^T}_{=0} + \int_0^T \frac{n\cancel{\omega}}{m\cancel{\omega}} \cos(n\omega t) \cos(m\omega t)\, dt$$

= (di nuovo per parti)

$(\sin(n\omega T) = \sin(n \cdot 2\pi) = 0)$

$$\frac{n}{m} \left[\cos(n\omega t) \frac{\sin(m\omega t)}{m\omega} \right]_0^T + \frac{n}{m} \frac{n\cancel{\omega}}{m\cancel{\omega}} \int_0^T \sin(n\omega t) \sin(m\omega t)\, dt$$

ancora zero

$$\Rightarrow$$

$$\left(1-\frac{n^2}{m^2}\right)\int_0^T \sin(n\omega t)\sin(m\omega t) = 0$$

Ne deduco che, se $n \neq m$ $\int_0^T \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)\,dt = 0$

$$\left(\begin{matrix}\cos^2 - \sin^2 = \cos(2t) \\ 1 - 2\sin^2 = \cos(2t)\end{matrix}\right)$$

Se invece $n = m \neq 0$

$$\int_0^T \sin(n\omega t)^2\,dt = \int_0^T \frac{1-\cos(2n\omega t)}{2}\,dt =$$

$$\left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2n\omega t)}{4n\omega}\right]_0^T = \frac{T}{2} - 0 \quad ; \quad \text{ANALOGAMENTE}$$

- $\int_0^T \sin(n\omega t)\cos(m\omega t) = 0 \quad \forall n, m$

- $\int_0^T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ \frac{T}{2} & \text{se } n = m > 0 \\ T & \text{se } n = m = 0 \end{cases}$

Queste proprietà si esprimono dicendo che

le funzioni $\left(\sin(n\omega t)\right)_{n\geq 1}$ $\left(\cos(n\omega t)\right)_{n\geq 0}$ sono

"ORTOGONALI" rispetto al prodotto $f\cdot g=\int_0^T f(t)g(t)\,dt$

<u>CONSEGUENZA</u> Se $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|<+\infty$ $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|<+\infty$

so (per il teorema) che $\exists\ f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(\omega t n)$

Se prendo $h(t)=\sin(j\omega t)$ j INTERO E USO $(*)$

$$\int_0^T f(t)\sin(j\omega t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\underbrace{\int_0^T\cos(n\omega t)\sin(j\omega t)\,dt}_{=0}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\underbrace{\int_0^T\sin(n\omega t)\sin(j\omega t)\,dt}_{=0 \text{ tranne } n=j}$$

$$=b_j\int_0^T\sin(j\omega t)^2\,dt=b_j\frac{T}{2}$$

DUNQUE

$$\left\{ b_j=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(j\omega t)\,dt\right.$$;

ANALOGAMENTE

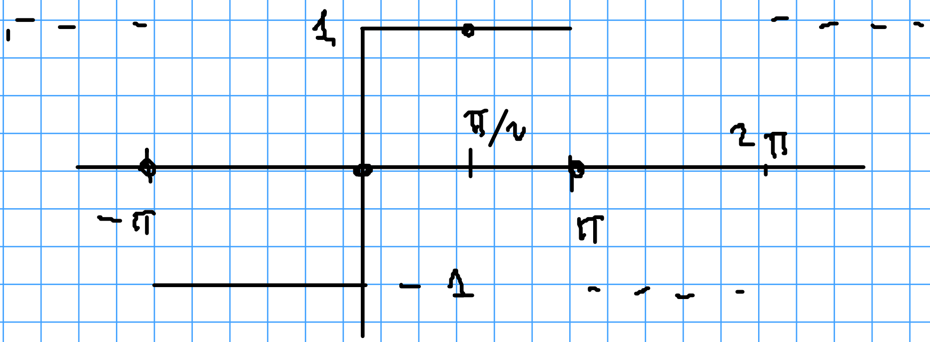
$$(F)\begin{cases} a_j = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(j\omega t)\,dt & \text{se } j>0 \\ a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt & (a_0 = \text{media di } f) \end{cases}$$

DEF. In generale, se f integrabile, T-periodica, chiamo coefficienti di Fourier i numeri a_n e b_n dati da (F)

Comunque la convergenza è "cattiva" vicino al salto (le f_n sono continue e mal si adattano a "imitare" la f)

$\omega = 1 \iff T = 2\pi$

Esempio (onda quadra)



$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \pi \\ 0 & t = -\pi, 0, \pi \\ -1 & -\pi < t < 0 \end{cases}$$

Calcoliamo i coeff. di Fourier (posso calcolare gli integrali su $[-\pi, \pi]$ invece che su $[0, 2\pi]$)

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} 1\,dt = 0$$

$n \geq 1$

$$a_n = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\big(-\cos(nt)\big)dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(nt)\,dt$$

$= 0$ (posso fare un cambio di variabile $s = -t$ nel primo int.)

NON CONTA - cos è pari

trovo $\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} -\cos(-ns)\,(-ds) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} -\cos(ns)\,ds$)

IN GENERALE f DISPARI $\Rightarrow a_n = 0 \quad \forall n$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(n\,t)\,dt \underset{\uparrow}{=} \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\sin(n\,t)\,dt =$$

l'integrando è pari

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(n\,t)\,dt = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n}\Big(-\underbrace{(-1)^n}_{\cos(n\pi)}+1\Big)$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \dfrac{4}{n\pi} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

PER IL TEOREMA ULTIMO

$$f(t) \underset{(\forall t)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt) = \sum_{h=0}^{\infty} b_{2h+1}\sin((2h+1)t)$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\sin((2h+1)t)}{2h+1}$$

(NOTA CHE $\sum |b_n| = +\infty$)

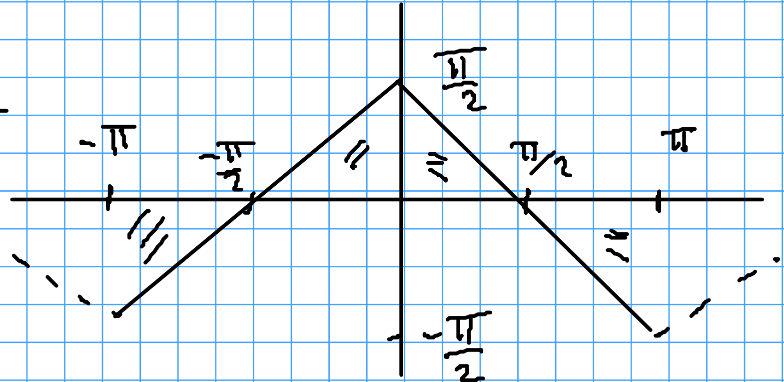
$\uparrow$ TIPO $\sum \frac{1}{n}$

Se metto $t = \frac{\pi}{2}$ TROVO

$$\left(\sin\left((2h+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(h\pi+\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^h\right)$$

$$1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(-1)^h}{2h+1} \Rightarrow \boxed{\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(-1)^h}{2h+1} = \frac{\pi}{4}}$$

Esempio



(onda triangolare)

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - |t| \quad \text{se} \quad |t| \leq \pi$$

Calcoliamo i coeff. di Fourier. f PARI $\Rightarrow$ tutti i $b_n = 0$

$$a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = 0 \quad (\text{si vede} \ldots)$$

$$n \geq 1 \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \overset{\text{integrando per}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \overset{\text{(per part.)}}{=}$$

$$\underbrace{\frac{2}{\pi}\left[f(t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi}}_{=0 \text{ a causa di } \sin(nt)} - \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} \underbrace{f'(t)}_{f' = -1}\sin(nt)\,dt =$$

$$\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin(nt)\,dt = \frac{2}{n\pi}\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi}\left(1 - (-1)^n\right)$$

$\Rightarrow \quad a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ \dfrac{4}{n^2\pi} & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases} \quad \Rightarrow$ (per l'ultimo teorema)

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(2h+1)^2} \cos\left((2h+1)t\right) \qquad (\text{converge } \forall t)$$

NOTA CHE $\sum |a_n| < +\infty$ perché $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2h+1)^2} < +\infty$

MA $\sum n|a_n| = +\infty \quad \simeq \sum \frac{1}{n}$

Se metto $t=0$ trovo

$$\frac{\pi}{2} = f(0) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1}{(2h+1)^2} \iff \boxed{\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(2h+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

(con metodi di questo tipo - vedi resto - si vede che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$!!)