$$y' = \frac{y}{2x} - 2 + x + \frac{1}{x} \qquad (E)$$

$$a(x) = \frac{1}{2x}$$

$$b(x) = -2 + x + \frac{1}{x}$$

devo considerare separatamente $\{x>0\}$ e $\{x<0\}$
(1) (2)

NEL CASO $\boxed{(1) \quad \text{FISSO} \quad x_0 = 1}$ / nel caso (2) posso prendere $x_0 = -1$

Studio (E) su $\{x > 0\}$, con $x_0 = 1$, al variare di $y(x_0) = y_0$

Applico la formula:

- $A(x) = \int_1^x \frac{1}{2t}\, dt = \left[\frac{1}{2} \ln |t|\right]_1^x = \ln \sqrt{x} - \underbrace{\ln(1)}_{0} \quad (x>0)$

- $y(x) = e^{\ln\sqrt{x}} \left(y_0 + \int_1^x \left(-2 + t + \frac{1}{t}\right) e^{-\ln\sqrt{t}}\, dt \right) =$

$$\sqrt{x} \left(y_0 + \int_1^x \left(-2 + t + \frac{1}{t}\right) \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt \right) =$$

$$\sqrt{x} \left(y_0 + \left[-4\, t^{1/2} + \frac{2}{3} t^{3/2} - 2\, t^{-1/2} \right]_1^x \right) =$$

$$\sqrt{x}\left(y_0 - 4\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{2}{\sqrt{x}} + 4 - \frac{2}{3} + 2\right) =$$

c

$$\boxed{c\sqrt{x} - 4x + \frac{2}{3}x^2 - 2}$$

dove $c = y_0 + \frac{16}{3}$

- Studiamo la famiglia delle soluzioni $(x>0)$

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = -2 = \begin{cases} -2^+ & c>0 \\ -2^- & c\le 0 \end{cases} \quad \text{(può servire)}$$

$c=0$ $\quad -4x + \frac{2}{3}x^2 - 2 = x\left(-4 + \frac{2}{3}x\right) - 2 \xrightarrow{x\to 0^+} -2^-$

$c\neq 0$ $\quad y(x) = \sqrt{x}\left(c - 4\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right) - 2 \longrightarrow \begin{matrix} -2^+ & c>0 \\ -2^- & c<0 \end{matrix}$

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$$ (qualunque sia c VINCE $\frac{2}{3}x^2$!!)

- SEGNO DI y': PONGO $F(x,y) := -2 + x + \frac{1}{x} + \frac{y}{2x}$

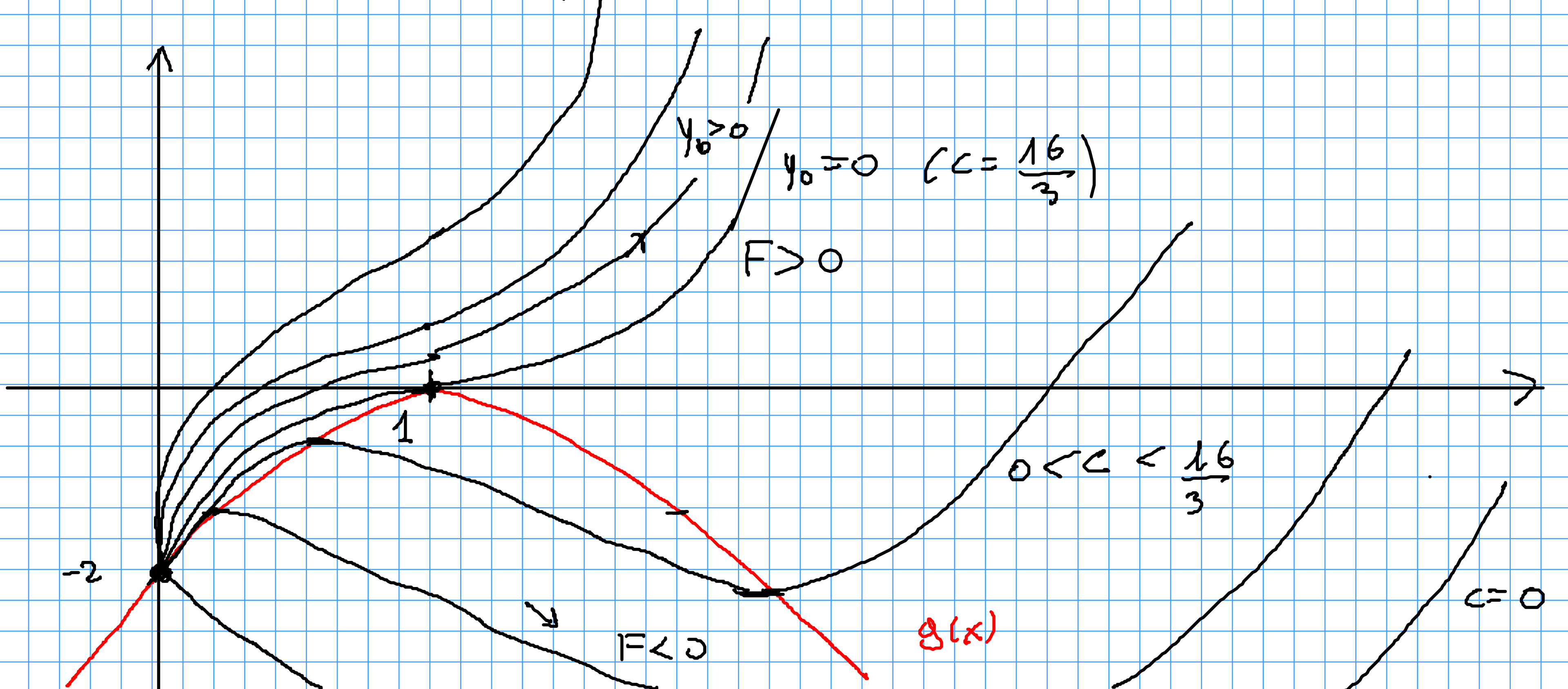
STUDIO IL SEGNO DI F. (siamo su $\{x>0\}$)

$$F(x,y)=0 \iff \frac{y}{2x} = 2 - x - \frac{1}{x} \iff y = 4x - 2x^2 - 2 =: g(x)$$

$g(x) = -2x^2 + 4x - 2$ è una parabola

$$g(x)=0 \iff x_{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-0}}{-2} = 1 \quad (= \text{vertice})$$

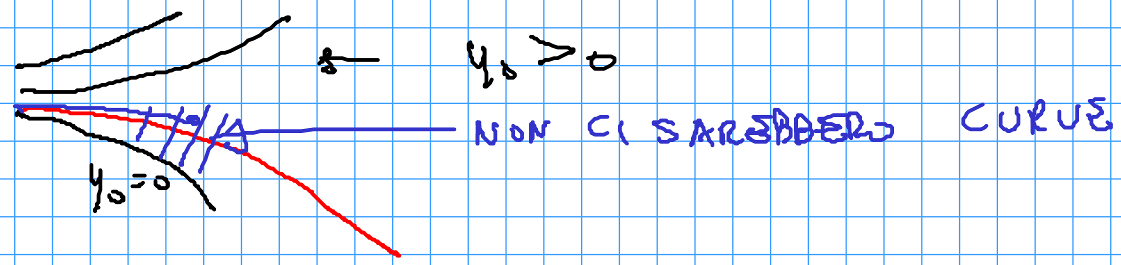
$g(x) = -2(x-1)^2$, concavità verso il basso



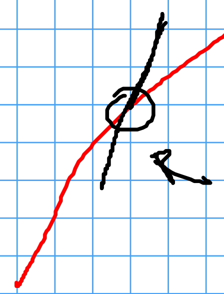
CONSIDERO LA CURVA CON $y_0 = 0$, cioè tale che $y(1) = 0$

- PER $x > 1$ NON PUÒ DECRESCERE.

SE DECRESCESSE



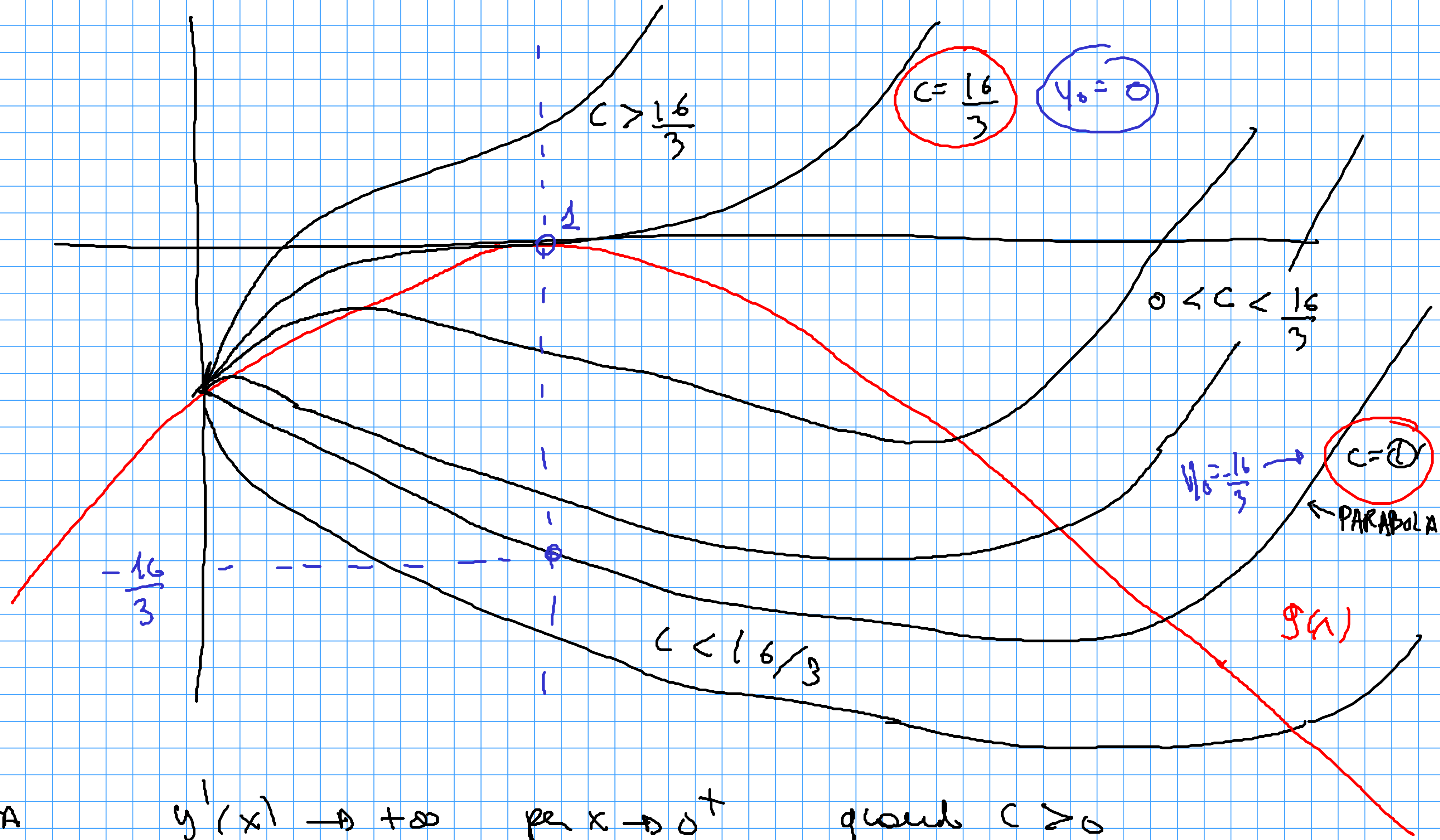
- LE CURVE CON $y_0 \geq 0$ NON POSSONO MAI ATTRAVERSARE LA CURVA ROSSA PER $x < 1$



NO, SOTTO LA CURVA ROSSA y DECRESCE

- NOTA $y_0 = 0 \iff c = \frac{16}{3}$

- LE CURVE CON $c \in \left]0, \frac{16}{3}\right[$ HANNO UN MIN REL. E UN MAX REL.



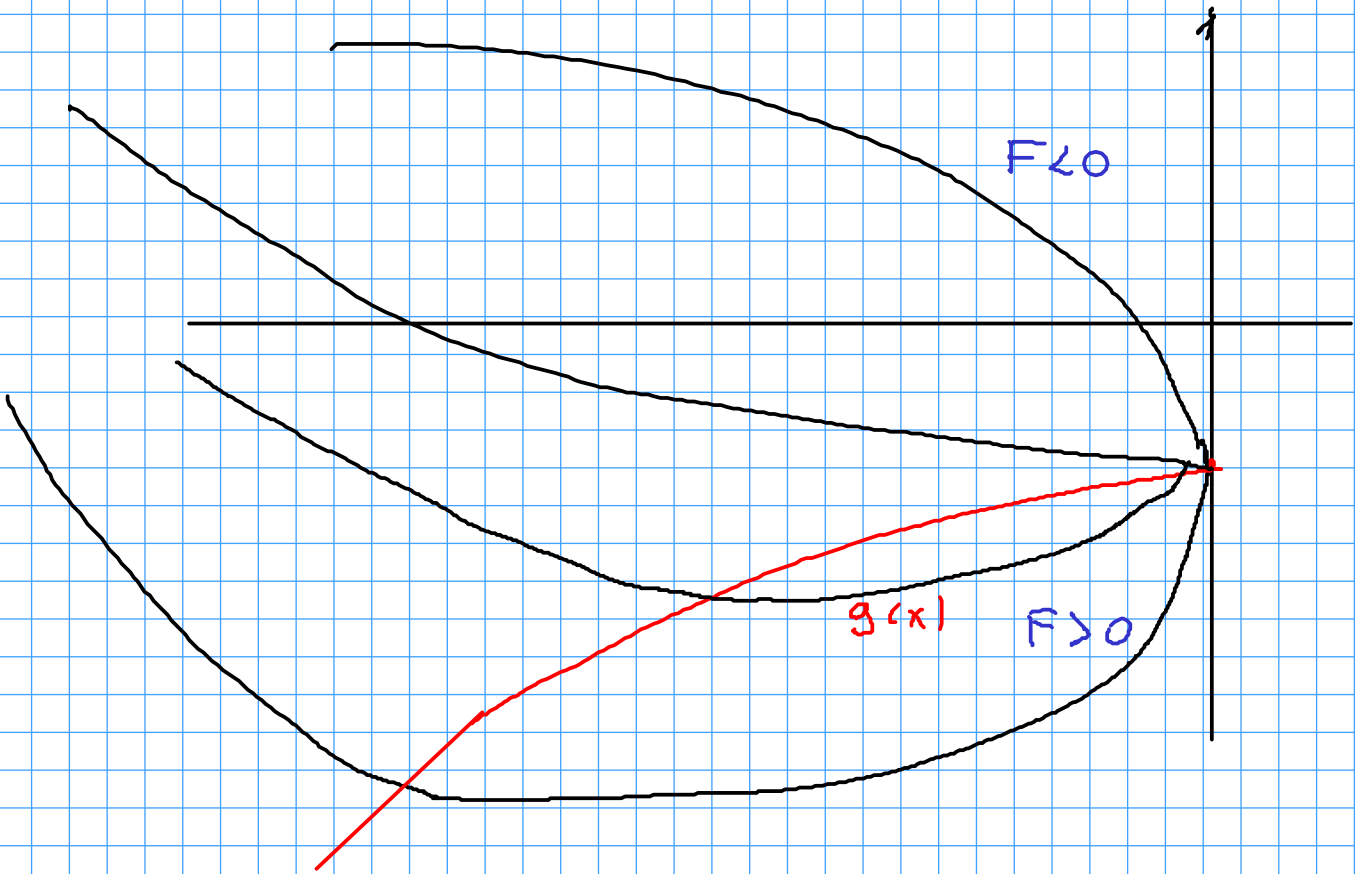
NOTA

$y'(x) \to +\infty$ per $x \to 0^+$ quando $C > 0$

$y'(x) \to -4$ per $x \to 0^+$ se $C = 0$

$y'(x) \to -\infty$ per $x \to 0^+$ quando $C < 0$

"A OCCHIO" IL CASO $X<0$



$$\lim_{x\to 0^-} y(x)$$

$$\lim_{x\to -\infty} y(x)$$

??

(PROVARE)

④ $$y' = \frac{2y}{x^2-4} - \frac{1}{(x-2)^2}$$

$a(x) = \dfrac{2}{x^2-4}$ definito per $x \neq \pm 2$

$b(x) = -\dfrac{1}{(x-2)^2}$ definito per $x \neq 2$

TRE INTERVALLI $]-\infty,-2[$, $\boxed{]-2,2[}$, $]2,+\infty[$

$x_0 = 0$ $y_0 = y(x_0)$

SCELGO QUESTO

$$A(x) = \int_0^x \frac{2}{t^2-4}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\right) dt =$$

$$\frac{1}{2}\Big[\ln(|t-2|) - \ln(|t+2|)\Big]_0^x = \left[\ln\sqrt{\frac{2-t}{t+2}}\right]_0^x = \ln\sqrt{\frac{2-x}{x+2}}$$

$$\Rightarrow y(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x+2}}\left(y_0 - \int_0^x \frac{1}{(t-2)^2}\sqrt{\frac{t+2}{2-t}}\,dt\right) = (*)$$

$$s = \sqrt{\frac{t+2}{2-t}} \qquad s^2(2-t) = t+2 \qquad t(1+s^2) = 2s^2-2$$

$$t = 2\,\frac{(s^2-1)}{s^2+1}, \quad t-2 = \frac{2s^2-2-2s^2-2}{s^2+1} =$$

$$= -\frac{4}{s^2+1}; \qquad dt = 2\,\frac{2s(s^2+1)-(s^2-1)2s}{(s^2+1)^2}\,ds = \frac{8s\,ds}{(s^2+1)^2}$$

$$\int_0^x (\quad)\,dt = \int_1^{\sqrt{\frac{x+2}{2-x}}} \left(-\frac{s^2+1}{4}\right)^2 s\,\frac{8s\,ds}{(s^2+1)^2} = \int_1^{\sqrt{\frac{x+2}{2-x}}} \frac{1}{16}\,8s^2\,ds =$$

$$\left[\frac{1}{6}\,s^3\right]_1^{\sqrt{\frac{x+2}{2-x}}} = \frac{1}{6}\left(\frac{x+2}{2-x}\right)^{3/2} - \frac{1}{6} \implies$$

$$y(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x+2}}\left(y_0 + \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(\frac{x+2}{2-x}\right)^{3/2}\right) = \qquad c = y_0 + \frac{1}{6}$$

$$\boxed{c\sqrt{\frac{2-x}{x+2}} - \frac{1}{6}\,\frac{x+2}{2-x}}$$

DEVO STUDIARLA IN $]-2, 2[$

- LIMITI

$$\lim_{x \to -2^+} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \\ 0^+ & \text{se } c = 0 \\ -\infty & \text{se } c < 0 \end{cases}$$

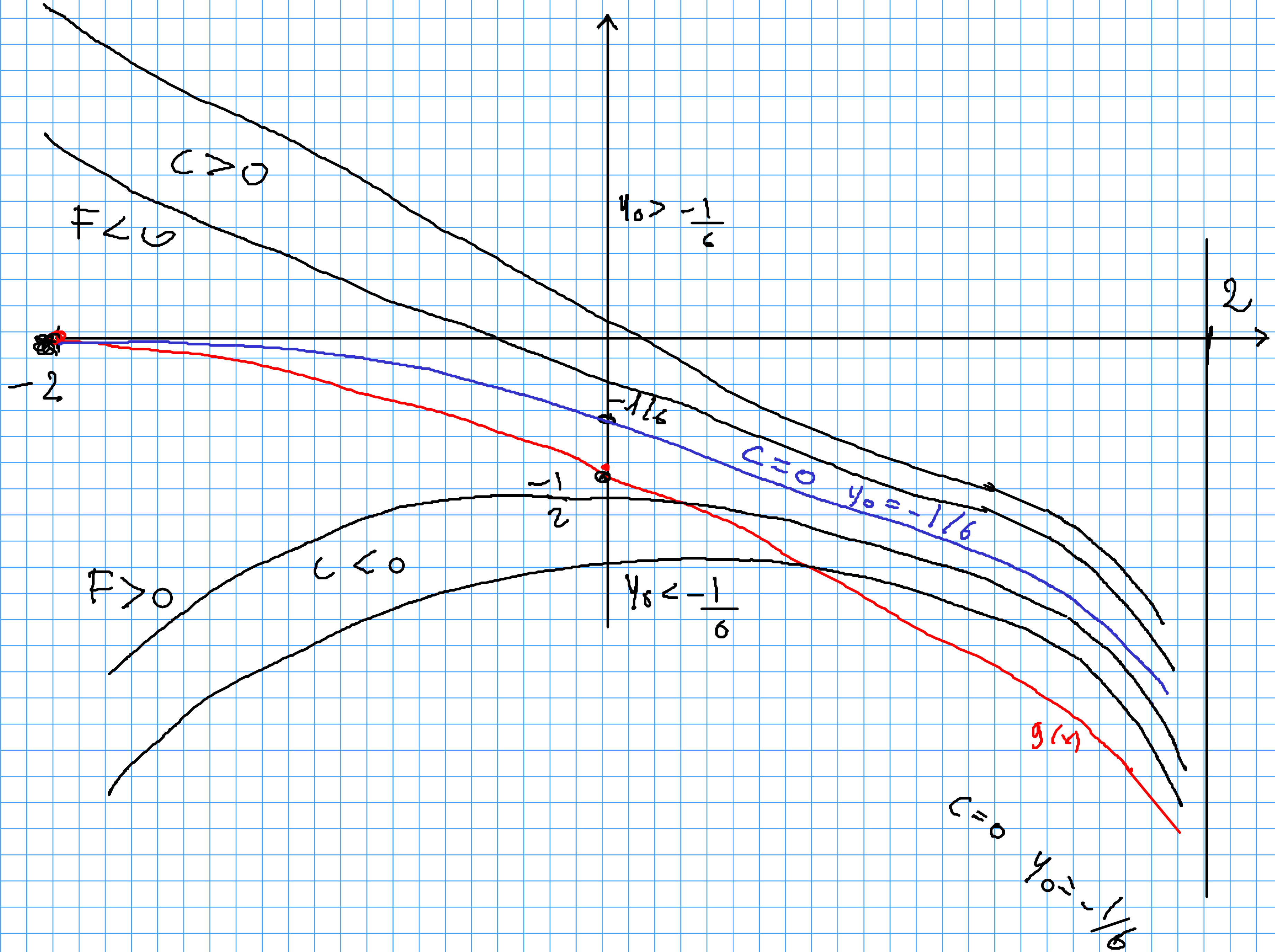
$$\lim_{x \to 2^-} y(x) = -\infty$$

- MONOTONIA: PONGO $F(x,y) := \frac{2y}{x^2-4} - \frac{1}{(x-2)^2}$ $\quad -2 < x < 2$

$$F(x,y) = 0 \iff y = \frac{1}{2} \frac{x^2-4}{(x-2)^2} = \boxed{\frac{1}{2} \frac{x+2}{x-2} =: g(x)}$$

$$F(x,y) > 0 \iff y < g(x) \;/\; F(x,y) < 0 \iff y > g(x)$$

perché $\underline{\underline{x^2-4<0}}$ $\left(\frac{2y}{x^2-4} > \frac{1}{(x-2)^2} \iff y < \frac{1}{2} \frac{x^2-4}{(x-2)^2} = g(x) \right)$

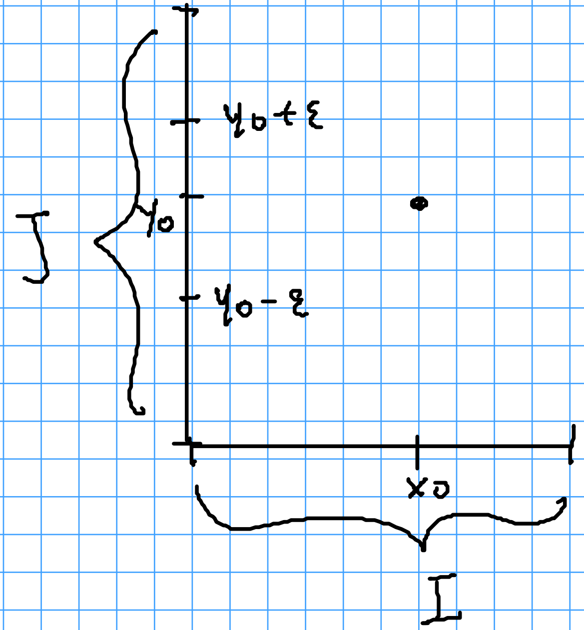


C > 0
F < 0
y0 > -1/6
2
-2
-1/6
-1/2
C = 0 y0 = -1/6
F > 0
c < 0
y0 < -1/6
g(x)
C = 0 y0 ≠ -1/6

Equazioni a variabili separabili

$A : J \to \mathbb{R}$ $\quad B : I \to \mathbb{R}$ continue, I, J intervalli

$x_0 \in I \qquad y_0 \in J$



$$(Eq) \begin{cases} y' = A(y)\, B(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

1. Se $A(y_0)=0 \Rightarrow y(x) = y_0 \quad \forall x \in I$ risolve (Eq)

Infatti $y'(x)=0$ e $A(y(x))\, B(x) = A(y_0) B(x) = 0$

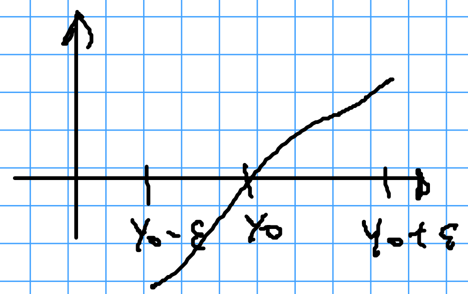
2. Se $A(y_0) > 0$ allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$A(y) > 0 \quad \forall\, y \in \,]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[\, \cap J.$

Dunque è definita $F :]y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon[\cap J \to \mathbb{R}$

$$F(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{d(\xi)}{A(\xi)}$$

Tale F è derivabile e ha derivata $\frac{1}{A(x)} > 0$; inoltre $F(y_0)=0$

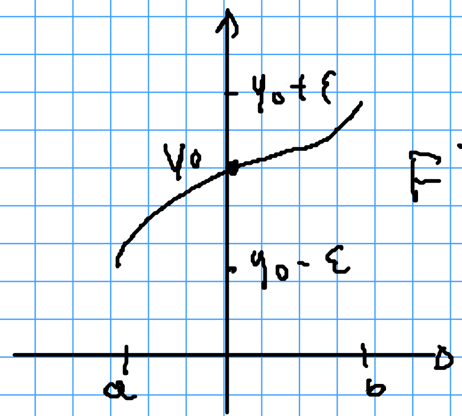


F

in particolare F è invertibile

e $F^{-1} :]a,b[\to]y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon[$

dove $a = F(y_0-\varepsilon) < 0 < F(y_0+\varepsilon) = b$.



F^{-1}

Poniamo poi $G(x) := \int_{x_0}^{x} B(t)\,dt$ per $x \in I$. G è derivabile e $G(x_0)=0$; dunque esiste $\delta>0$ tale che

$x_0-\delta < x < x_0+\delta$, $x \in I \implies G(x) \in]a,b[$

Ne segue che ha senso definire

$$y(x) = F^{-1}(G(x))$$

Si ha $y(x_0) = F^{-1}(G(x_0)) = F^{-1}(0) = y_0$.

Inoltre

$$y' = \frac{d}{d\xi} F^{-1}(\xi)\Big|_{\xi = G(x)} \cdot G'(x) = \frac{1}{F'(F^{-1}(\xi))}\Big|_{\xi = G(x)} B(x) =$$

$$A(F^{-1}(\xi))\Big|_{\xi = G(x)} B(x) = A(F^{-1}(G(x))) \cdot B(x) = A(y(x)) \cdot B(x)$$

$\Rightarrow$ y verifica l'equazione in $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I$

(3) Viceversa se y verifica l'equazione su un intervallo $I' \subset I$ e se $A(y(x)) > 0$ per ogni $x \in I'$, ottengo:

$$\frac{y'(x)}{A(y(x))} = B(x) \Rightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{A(y(t))}\, dt = \int_{x_0}^{x} B(t)\, dt$$

e usando la sostituzione $\zeta = y(t)$

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{d\zeta}{A(\zeta)} = \int_{x_0}^{x} B(t)\,dt \iff F(y(x)) = G(x)$$

dove $F(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{d\zeta}{A(\zeta)}$ $\quad G(x) = \int_{x_0}^{x} B(t)\,dt$

(notiamo che F è definita sul "massimo" intervallo $J^+_{y_0}$ contenente y_0 e su cui $A > 0$ e che, per ipotesi, $y(x) \in J^+_{y_0}$)

Dato che F è invertibile (strett. monotona)

$$y(x) = F^{-1}(G(x))$$

#