Confronto tra l'enunciato del teorema di Cauchy e i casi precedenti

1. Eq lineare $\quad y' = a(x)\, y + b(x)$

$$F(x, y) = a(x)\, y + b(x)$$

Vediamo se valgono le ipotesi di Cauchy (??)

$$F(x, y_1) - F(x, y_2) = a(x)(y_1 - y_2)$$

$$|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \le |a(x)|\, |y_1 - y_2| \le \overbrace{\max_{x \in I} |a(x)|}^{?? \,=\, L} |y_1 - y_2|$$

il max esiste se I è limitato e chiuso. MI POSSO SEMPRE METTERE IN QUESTO CASO — il t. di Cauchy riguarda i punti x vicini a x_0

OK vale il teorema ($\Rightarrow \exists$ sol. $y(x)$ definita per $x \sim x_0$)

NOTA nel caso lineare so di più: la sol $\exists$ $\forall x \in I$.

② Caso variabili separabili:

$$F(x,y) = A(y)\,B(x)$$

$$F(x,y_1) - F(x,y_2) = \left(A(y_1) - A(y_2)\right) B(x)$$

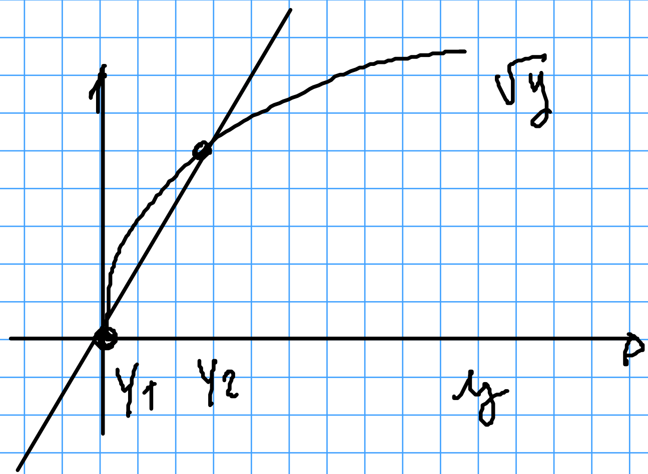
come prima $\max_{x \in I} |B(x)| = L \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$|F(x,y_1) - F(x,y_2)| \leq |A(y_1) - A(y_2)| \quad ??$$

DIPENDE DA A. Se A è lipschitziana tutto ok. - se no va male - per es $A(y) = \sqrt{y}$

NON È LIPSCHITZIANA

$$\left| \frac{\sqrt{y_2} - \sqrt{0}}{|y_2 - 0|} \right| \to +\infty \text{ se } y_2 \to 0$$



L'eq. $y' = \sqrt{y}$ NON HA SOL. UNICA (NON VALE CAUCHY)

Se invece considero

$$y' = y^2 \longrightarrow F(y) = y^2$$

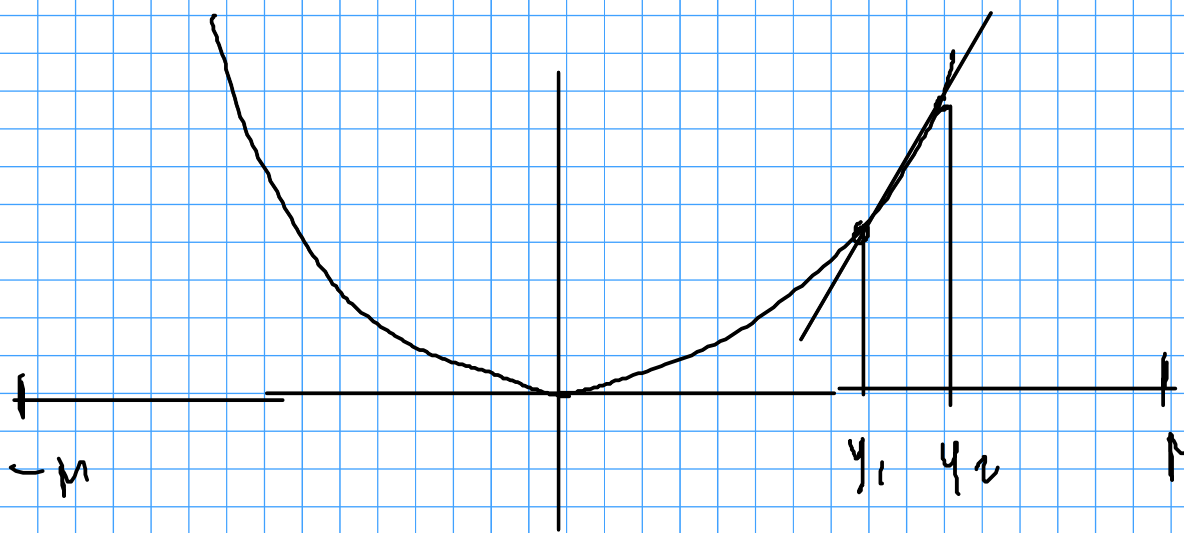
Questa funzione è <u>LIPSCHITIANA se $y \in [-M, M]$</u>

$\exists L :$ $\quad |y_1^2 - y_2^2| \leq L\,|y_1 - y_2|$ se $y_1, y_2 \in [-M, M]$

$(L = 2M ?)$

Mentre $y \to y^2$ NON è LIPSCHITZIANA IN $\mathbb{R}$; NON $\exists L$:

$$|y_1^2 - y_2^2| \leq L\,|y_1 - y_2| \qquad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$



Questo basta a dire che l'eq. $y' = y^2$ verifica le ip. di Cauchy

$$\Omega = [-M, M] \times \mathbb{R}$$

Se A e' una matrice $N \times N$

$$\rightarrow \|A\| = \min \{ L : \|Ax\|_N \leq L\|x\|_N \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \}$$

$$= \max \{ \|Ax\|_N : \|x\| = 1 \}$$

Dato x: considero $\|Ax\|_N$

DI SICURO $\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^{N} \Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j}_{\text{COMPONENTE } i\text{-ESIMA DI } Ax} \Big)^2 \leq$ (DA VERIF.)

$$\max_{i,j} |a_{ij}|^2 \sum_{i=1}^{N} \Big(\sum_{j=1}^{N} x_j \Big)^2 \leq \max_{i,j} |a_{ij}|^2 \sum_{i=1}^{1} N \sum_{j=1}^{N} x_j^2 =$$

$\underbrace{\text{Costante}}$ $\|x\|^2 \Rightarrow$ esiste una cost. C :

$$\|Ax\| \leq C\|x\|$$

CHIAMO NORMA DI A il minimo di queste costanti

Esercizio

$$(a_1 + \dots + a_N)^2 \leq N(a_1^2 + \dots + a_N^2) \quad ?$$

Di sicuro $\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$

e $\|A\|$ è la costante migliore

(SYS) $\quad Y' = A(x)Y + B(x)$

(SYS.0) $\quad Y' = A(x)Y \qquad$ (OMOGENEO)

① Se Y_1 e Y_2 risolvono (SYS) $\Rightarrow Y_1 - Y_2$ risolve (SYS.0).

$$Y_1' = A(x)Y_1 + B(x)$$
$$Y_2' = A(x)Y_2 + B(x)$$

$\leftarrow$ FACCIO LA DIFFERENZA

$\downarrow$ (CONTA LA LINEARITÀ DELL'EQUAZIONE)

$$(Y_1 - Y_2)' = Y_1' - Y_2' = A(x)(Y_1 - Y_2)$$

② (VICEVERSA) SE $\overline{Y}$ è sol di (SYS) e Y_0 è soluzione di (SYS.0) $\Rightarrow \overline{Y} + Y_0$ è sol. di (SYS.)

$$\overline{Y}' = A(x)\overline{Y} + B(x)$$
$$Y_0' = A(x)Y_0$$

SOMMO $\Rightarrow \quad (\overline{Y} + Y_0)' = A(x)(\overline{Y} + Y_0) + B(x)$

L'insieme

$$S = \{ y : I \to \mathbb{R} \text{ per cui } y' = A(x) y \}$$

è uno spazio vettoriale (GIÀ VISTO) di dimensione $\underline{\underline{N}}$.

<u>Dim.</u> Prendiamo $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ... $e_N = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

(sono una base in $\mathbb{R}^N$). Fissiamo $x_0 \in I$

Per il teorema di Cauchy $\exists\ y_1 \dots y_N$

$$\begin{cases} y_j' = A(x) y_j \\ y_j(x_0) = e_j \end{cases}$$

(RISOLVO L'EQ. CON DATO INIZIALE $e_1 \dots e_N$)

$y_1 \dots y_N \in S$ (I) Dimostro che sono linearmente indipendenti

CIOÈ se $c_1 \dots c_N \in \mathbb{R}$ e se $c_1 y_1 + \dots + c_N y_N$ È LA FUNZIONE

NULLA $\Longrightarrow c_1 = \dots = c_N = 0$. MA se

$c_1 y_1(x) + \dots + c_N y_N(x) = 0 \quad \forall x \Longrightarrow c_1 y_1(x_0) + \dots + c_N y_N(x_0) = 0$

CIOÈ $c_1 e_1 + \dots + c_N e_N = 0 \Rightarrow c_1 = \dots = c_N = 0$

perché i versori $e_1 \dots e_N$ sono lin. ind.

(II) Dimostriamo che una qualunque sol. y si scrive come combinazione lineare di $y_1 \dots y_N$.

Prendiamo $y \in S$. Pongo $v = y(x_0) \in \mathbb{R}^N$

Esistono $c_1 \dots c_N$ tali che $v = c_1 e_1 + \dots + c_N e_N$

Pongo $\bar{y} = c_1 y_1 + \dots + c_N y_N$. $\bar{y}$ è soluzione

$$\bar{y}(x_0) = c_1 y_1(x_0) + \dots + c_N y_N(x_0) = c_1 e_1 + \dots + c_N e_N = v$$

Per L'UNICITÀ DELLA SOLUZIONE deve essere $\bar{y}(x) = y(x) \quad \forall x$

Quindi $y = c_1 y_1 + \dots + c_N y_N$ #

PER TROVARE <u>TUTTE</u> LE SOL. DELL'OMOGENEA BASTA TROVARNE N linearmente indipendenti

+ poi ne faccio le combinazioni lineari.

Per trovare tutte le sol. dell'eq. generale devo.

- Trovare tutte le sol. dell'omogenea (N lin. ind) - cioè S.
- Trovare UNA sol. dell'eq. generale $\overline{Y}$

Allora

$$\{ y : y' = A(x) y + B(x) \} = \{ \overline{Y} + Y_0 \;\; ; Y_0 \in S \}$$

Se devo studiare l'eq lineare di ordine N:

$$a_N(x)\, y^{(N)} + a_{N-1}(x)\, y^{(N-1)} + \dots + a_0(x)\, y(x) = b(x)$$

LA POSSO TRASFORMARE IN UN SISTEMA DEL 1° ORDINE

(N-equazioni)

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(N-1)} \end{pmatrix} \longrightarrow$$

VEDI ULTIMA PAGINA

ESEMPIO

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

EQ. del secondo ordine, omogenea, lineare (e coeff. costanti)

Per risolverlo devo trovare DUE sol. linearmente indip.

Cerco $y(x) = e^{\alpha x} \Rightarrow y'(x) = \alpha e^{\alpha x}$, $y''(x) = \alpha^2 e^{\alpha x}$

$$\Rightarrow y'' - 5y' + 6y = e^{\alpha x}(\alpha^2 - 5\alpha + 6) = 0$$

Cerco le radici di $\alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0$

$$\alpha_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \begin{cases} 6/2 = 3 \\ 4/2 = 2 \end{cases}$$

Ho trovato che e^{2x} e e^{3x} sono soluzioni.

SI PUO' VEDERE CHE SONO INDIPENDENTI — NON $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ tale che $e^{3x} = \lambda e^{2x}$ $\left(\Leftrightarrow e^{x} = \lambda \ \text{NO} \right)$

DUNQUE le sol di $y'' - 5y' + 6y = 0$ SONO

$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}$ al variare di c_1 e c_2 in $\mathbb{R}$.

Se devo risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 0 \\ y(0) = 1, \ y'(0) = -1 \end{cases}$$

devo imporre

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 3c_1 + 2c_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -1-2 = -3 \\ c_2 = -(-1-3) = 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow y(x) = 4e^{2x} - 3e^{3x}$

verifico:
$y(0) = 4 - 3 = 1$
$y'(0) = 8 - 9 = -1$
ok

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y = b(x)$$

PONIAMO $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ -\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} & \dots & & -\frac{a_0(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix}$ $\quad B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \frac{b(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix}$

Allora se $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ verifica $Y' = A(x) Y + B(x)$

si ha

$$y_1' = y_2 + 0$$
$$y_2' = y_3 + 0$$
$$\vdots$$
$$y_n' = -\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} y_1 - \frac{a_{n-2}(x)}{a_n(x)} y_2 - \dots - \frac{a_0(x)}{a_n(x)} y_n + \frac{b(x)}{a_n(x)}$$

Allora, posto $y = y_1$, si ha $y_2 = y' \dots y_n = y^{(n-1)}$ e

$$y_n' = y^{(n)} = -\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} y^{(n-1)} - \dots - \frac{a_0(x)}{a_n(x)} y + \frac{b(x)}{a_n(x)} \iff$$

$$a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_0(x) y(x) = b(x)$$