$$a y'' + b y' + c y = e^{z_0 x} \qquad a, b, c \in \mathbb{C}, \quad z_0 \in \mathbb{C}$$

Cerco $\bar{y}(x) = \gamma e^{z_0 x}$. GIÀ VISTO CHE se $P(z_0) \neq 0$

$(P(z) = a z^2 + b z + c)$ trovo $\gamma = \dfrac{1}{P(z_0)}$

COSA FACCIO SE $P(z_0) = 0$??

Cerco $\bar{y}(x) = \gamma x e^{z_0 x}$.

$$\bar{y}'(x) = \gamma e^{z_0 x} + \gamma x z_0 e^{z_0 x}$$

$$\bar{y}''(x) = \gamma z_0 e^{z_0 x} + \gamma z_0 e^{z_0 x} + \gamma x z_0^2 e^{z_0 x},$$

$$a \bar{y}'' + b \bar{y}' + c \bar{y} = a\left(2\gamma z_0 e^{z_0 x} + \gamma x z_0^2 e^{z_0 x}\right) + b\left(\gamma e^{z_0 x} + \gamma x z_0 e^{z_0 x}\right) + c \gamma x e^{z_0 x} =$$

$$\gamma e^{z_0 x} \left\{ \underbrace{(2 a z_0 + b)}_{P'(z_0)} + x \cancel{\underbrace{(a z_0^2 + b z_0 + c)}_{P(z_0) = 0}} \right\} = e^{z_0 x}$$

Trovo $\quad \gamma = \dfrac{1}{p'(z_0)} = \dfrac{1}{2a z_0 + b}$ a patto che $p'(z_0) \neq 0$

cioè a patto che z_0 sia radice semplice di P.

- Se $P(z_0) \neq 0$ $\qquad \bar{y}(x) = \gamma e^{z_0 x}$
- Se $P(z_0) = 0$, $P'(z_0) \neq 0$ $\qquad \bar{y}(x) = \gamma x e^{z_0 x}$
- Se $P(z_0) = 0$, $P'(z_0) = 0$ $\qquad \bar{y}(x) = \gamma x^2 e^{z_0 x}$

Verifichiamo il terzo caso:

$\bar{y}(x) = \gamma x^2 e^{z_0 x}$; $\quad \bar{y}'(x) = \gamma 2x e^{z_0 x} + \gamma x^2 z_0 e^{z_0 x}$

$$\bar{y}''(x) = \gamma \left(2 e^{z_0 x} + 2x z_0 e^{z_0 x} + 2x z_0 e^{z_0 x} + x^2 z_0^2 e^{z_0 x} \right) =$$

$$a \bar{y}'' + b \bar{y}' + c y = \gamma e^{z_0 x} \left\{ 2a + 4a z_0 x + a z_0^2 x^2 + 2bx + b z_0 x^2 + c x^2 \right\} =$$

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{2a}}$$

$$\gamma e^{z_0 x} \left\{ 2a + 2 \cancel{P'(z_0)}^{=0} x + \cancel{P(z_0)}^{=0} x^2 \right\} = \gamma e^{z_0 x} \cdot 2a$$

Più in generale se si deve risolvere

$$a y'' + b y' + c y = p(x) e^{z_0 x}$$

con $p(x)$ polinomio di grado k, allora una sol. si può trovare del tipo

$$\bar{y}(x) = q(x) e^{z_0 x}$$

dove q è un polinomio e

$$\text{grado di } q(x) = \begin{cases} \text{grado di } p(x) & \text{se } P(z_0) \neq 0 \\ \text{grado di } p(x) + 1 & \text{se } P(z_0) = 0 \ P'(z_0) \neq 0 \\ \text{grado di } p(x) + 2 & \text{se } P(z_0) = P'(z_0) = 0 \end{cases}$$

(mentre, per forza, $P''(z_0) = 2a \neq 0$)

<u>ESEMPIO</u> Cerchiamo una sol. particolare di

$$y'' - y = x^2 e^{2x}$$

$P(z) = z^2 - 1$ (ha radici ± 1) ; $z_0 = 2$ NON È RADICE.

$p(x) = x^2$ ha grado 2. Cerco $\bar{y}(x)$ del tipo:

$$\bar{y}(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^{2x}$$

$$\bar{y}'(x) = (2\alpha x + \beta)\, e^{2x} + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, 2 e^{2x} =$$

$$\left(2\alpha x^2 + (2\alpha + 2\beta) x + \beta + 2\gamma\right) e^{2x}$$

$$\bar{y}''(x) = \left(4\alpha x + 2(\alpha + \beta) + 4\alpha x^2 + 4(\alpha + \beta) x + 2\beta + 4\gamma\right) e^{2x}$$

$$= \left(4\alpha x^2 + 4(2\alpha + \beta) x + 2\alpha + 4\beta + 4\gamma\right) e^{2x}$$

$$\bar{y}'' - y = e^{2x}\left(4\alpha x^2 + 4(2\alpha + \beta) x + 2\alpha + 4\beta + 4\gamma - \alpha x^2 - \beta x - \gamma\right)$$

$$= e^{2x}\left(3\alpha x^2 + (8\alpha + 3\beta) x + 2\alpha + 4\beta + 3\gamma\right)$$

SE IMPONGO CHE VENGA $x^2 e^{2x}$ $\Longrightarrow$

$\alpha = 1/3$, $8\alpha + 3\beta = 0$, $2\alpha + 4\beta + 3\gamma = 0$

$\alpha = 1/3$, $\beta = -8/9$, $\gamma = \left(-2/3 + 32/9\right)/3 = \dfrac{26}{27}$

ESEMPIO (SISTEMA DEL PRIMO ORDINE, DUE EQ. - IN $\mathbb{R}^2$)

$$\begin{cases} u' = u + v \\ v' = -u + v \end{cases}$$

DERIVIAMO LA PRIMA RIGA: $\underline{u'' = u' + v'}$

$$\Rightarrow \quad u'' = u' + (-u + v) = u'' = u' - u + v = \circledast$$

(USO LA SECONDA RIGA)

RICAVO v MEDIANTE LA PRIMA RIGA

$$\circledast = \underline{u' - u + u' - u} = 2u' - 2u \Rightarrow$$

$$\boxed{u'' - 2u' + 2u = 0}$$

LO RISOLVO!

$P(z) = z^2 - 2z + 2$ HA RADICI $1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$

$$\boxed{u(x) = e^x \left(c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) \right)}$$

UNA VOLTA TROVATA $u(x)$ POSSO RICAVARE $v(x)$ dalla prima riga

$$v(x) = u'(x) - u(x) = e^x \left(c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) \right) +$$

$$e^x\left(-c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x)\right) - \left(c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)\right) e^x =$$

$$\boxed{e^x\left(c_2 \cos(x) - c_1 \sin(x)\right) = v(x)}$$

POSSO ANCHE SCRIVERE u e v IN MODO LEGGERMENTE DIVERSO

$$\boxed{u(x) = A \cos(x-\theta)\, e^x}$$

al variare di $A \geq 0$

$0 \leq \theta < 2\pi$

$A =$ ampiezza , $\theta =$ sfasamento . Allora

$$v = u' - u = \underbrace{-A \sin(x-\theta)\, e^x + \cancel{A \cos(x-\theta) e^x}}_{u'} - \underbrace{\cancel{A \cos(x-\theta)}}_{u}$$

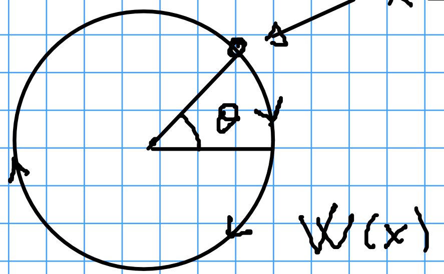
quindi

$$\boxed{v(x) = -A \sin(x-\theta)\, e^x}$$

Notiamo allora che la soluzione si può scrivere

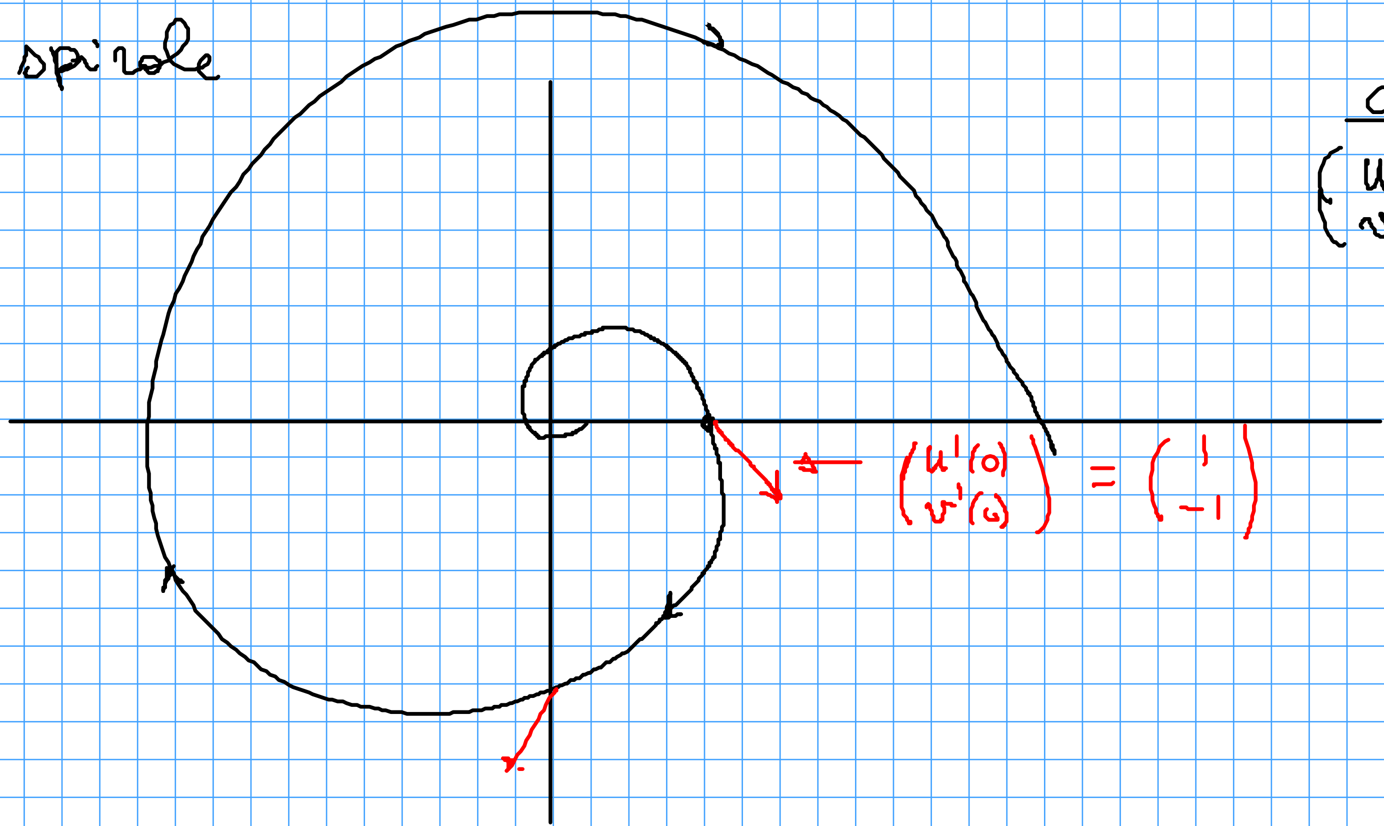
$$\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} \cos(x-\theta) \\ -\sin(x-\theta) \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} \cos(\theta - x) \\ \sin(\theta - x) \end{pmatrix} = e^x\, W(x)$$

dove il "versore" $W(x)$ descrive la circonferenza unitaria "girando" in senso orario



$$W(0) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Dato che $W(x)$ è moltiplicato per e^{x} la soluzione descrive una spirale



caso $\theta = 0$

$$\begin{pmatrix} u(0) = 1 \\ v(0) = 0 \end{pmatrix}$$

NOTA (unici) Date c_1 e c_2 esistono sempre $A \geq 0$ e $\theta \in [0, 2\pi[$ tali che

$$c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) = A \cos(x - \theta) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Infatti

$$A \cos(x-\theta) = A \cos(x) \cos(\theta) + A \sin(x) \sin(\theta)$$

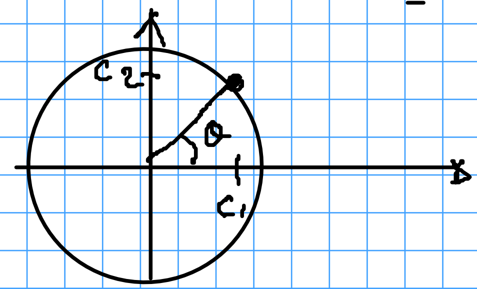
per cui la tesi vale se e solo se

$$\begin{cases} A \cos(\theta) = c_1 \\ A \sin(\theta) = c_2 \end{cases} \Longrightarrow A^2 \cos^2(\theta) + A^2 \sin^2(\theta) = c_1^2 + c_2^2 \Longleftrightarrow \boxed{A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}}$$

e quindi su θ si ha la condizione

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \\ \sin(\theta) = \dfrac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \end{cases}$$

che individua univocamente θ $\longrightarrow$



VOLENDO UNA FORMULA

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{c_2}{c_1}\right) & \text{se } c_1 > 0 \\ \pm\pi/2 & \text{se } c_1 = 0 \text{ e } c_2 = \pm 1 \\ \arctan\left(\dfrac{c_2}{c_1}\right) + \pi & \text{se } c_1 < 0 \end{cases}$$

(però questo $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi[$ per ....)