Lezione 31 - 20/05/2009

Rifacciamo il sistema $\begin{cases} u' = u + v \\ v' = -u + v \end{cases}$

Derivo la prima riga $\quad u'' = u' + v' = u' - u + v =$

$u' - u + u' - u = 2u' - 2u$

$\Rightarrow \quad u'' - 2u' + 2u = 0 \qquad$ pol. caratt. $\quad P(z) = z^2 - 2z + 2$

RADICI $\quad 1 \pm i$

$\Rightarrow \quad u(x) = e^x \left(c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) \right)$

Ricaviamo $v(x) = u' - u = e^x \left(-c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x) + \cancel{c_1 \cos(x)} + \cancel{c_2 \sin(x)} \right)$
$- e^x \left(\cancel{c_1 \cos(x)} + \cancel{c_2 \sin(x)} \right)$

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) \\ c_2 \cos(x) - c_1 \sin(x) \end{pmatrix} e^x = e^x \begin{pmatrix} u_0 \cos(x) + v_0 \sin(x) \\ v_0 \cos(x) - u_0 \sin(x) \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{PERIODICO, DI PER } 2\pi}$

(SI IMPONGO $u(0) = u_0 \quad v(0) = v_0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} c_1 = u_0 \\ c_2 = v_0 \end{matrix}$)

PER CAPIRE COSA FA $\begin{pmatrix} u_0 \cos(x) + v_0 \sin(x) \\ v_0 \cos(x) - u_0 \sin(x) \end{pmatrix}$

scriviamo

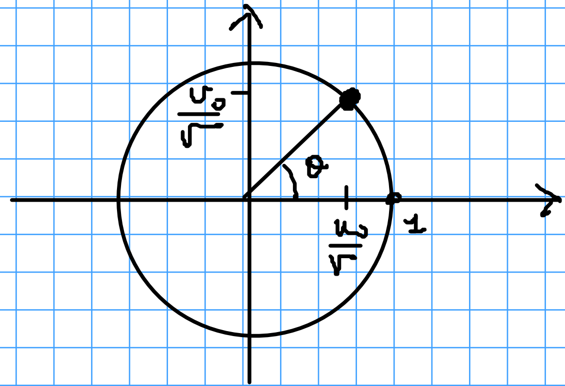
$$u_0 \cos(x) + v_0 \sin(x) = A\cos(x-\theta) = A\cos(x)\cos(\theta) + A\sin(x)\sin(\theta)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A\cos(\theta) = u_0 \\ A\sin(\theta) = v_0 \end{cases}$$

(devo ritrovare le "coordinate polari" di $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$)

$$\Rightarrow A = \sqrt{u_0^2 + v_0^2}$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{u_0}{\sqrt{u_0^2+v_0^2}} \\ \sin(\theta) \quad \dfrac{v_0}{\sqrt{u_0^2+v_0^2}} \end{cases}$$



Quindi posso scrivere $u(x) = A\cos(x-\theta)$

Passando a $v(x)$ proviamo a scrivere

$$v_0\cos(x) - u_0\sin(x) = A_1 \sin(x-\theta_1) = A_1\sin(x)\cos(\theta_1) - A_1\cos(x)\sin(\theta_1)$$

$$\begin{cases} A_1\cos(\theta_1) = -u_0 \\ A_1\sin(\theta_1) = -v_0 \end{cases} \qquad A_1 = \sqrt{u_0^2+v_0^2} \qquad \theta_1 = \theta + \pi$$

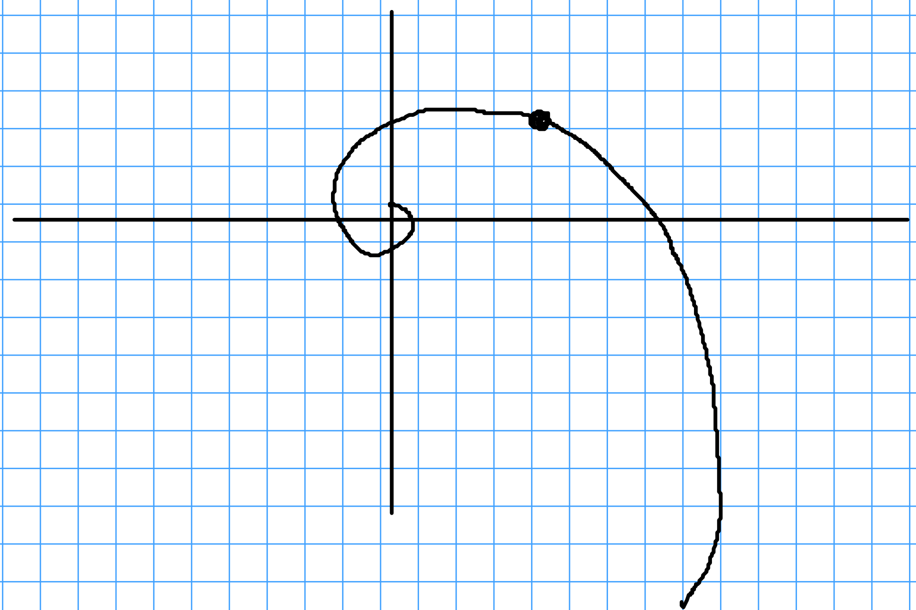
$$\Rightarrow v(x) = A\sin(x-\theta-\pi) = -A\sin(x-\theta)$$

Allo fine

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = e^{x} \sqrt{u_0^2 + v_0^2} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(x-\theta) \\ -\sin(x-\theta) \end{pmatrix}} \qquad (\theta = \dots)$$

descrive una circonferenza percorsa in senso antiorario

La moltiplicazione per e^{x} produce una "spirale" che si allarga per x crescente:



Altro esempio

$$\begin{cases} u' = u + v \\ v' = u - v \end{cases} \qquad Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Y' = M\,Y$$

Stesso procedimento di prima

$$u'' = u' + v' = u' + u - v = u' + u - (u' - u) = 2u$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{u'' - 2u = 0} \qquad P(z) = z^2 - 2$$

RADICI $\pm\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \quad u(x) = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x}$$

$$v(x) = u' - u = c_1\sqrt{2}\, e^{\sqrt{2}x} - c_2\sqrt{2}\, e^{-\sqrt{2}x} - c_1 e^{\sqrt{2}x} - c_2 e^{-\sqrt{2}x}$$

$$Y(x) = \begin{pmatrix} c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x} \\ c_1(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}x} - c_2(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}x} \end{pmatrix}$$

Se voglio imporre $Y(0) = Y_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ devo risolvere

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = u_0 \\ (\sqrt{2}-1)c_1 - (\sqrt{2}+1)c_2 = v_0 \end{cases} \quad - - - -$$

Rifacciamo l'esercizio usando le proprietà della matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(SIMMETRICA, dunque ho tutti autovettori reali e autovalori ortogonali)

Polinomio caratt.

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -(1-\lambda)(1+\lambda) - 1$$

$$\lambda^2 - 2 \qquad \text{RADICI} \quad \lambda_{1,2} = \pm 2$$

$\Leftrightarrow$ AUTOVETTORI DI M.

AUTOVETTORI ?? $\qquad \lambda = \pm\sqrt{2}$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (1-\lambda)x + y = 0$$

$$y = \begin{cases} (\sqrt{2}-1)x & (\lambda = \sqrt{2}) \\ (-\sqrt{2}-1)x & (\lambda = -\sqrt{2}) \end{cases}$$

Scelgo $\quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\|e_1\| = \|e_2\| = (1+(\sqrt{2}-1)^2)^{1/2} = \sqrt{4-2\sqrt{2}}\right.$$

ANZI Prendo $\hat{e}_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1$ $\hat{e}_2 = \frac{1}{\|e_2\|} e_2$

$$\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se mi metto nella base $(\hat{e}_1, \hat{e}_2)$ la matrice si diagonalizza $\Rightarrow D = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Questo si esprime dicendo che se $B = (\hat{e}_1 | \hat{e}_2)$

$$\boxed{M = B D B^{-1}}$$

(se dovesse servire $B^{-1} = B^t$)

TORNIAMO ALL'EQUAZIONE

$Y' = MY \iff Y' = B D B^{-1} Y$ (moltiplico a sx per B^{-1})

$$B^{-1}Y' = D\, B^{-1}Y$$

Se pongo $Z(x) = B^{-1}Y(x)$

trovo $Z' = D\,Z$

$$Z = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} u_1' = \sqrt{2}\, u_1 \\ v_1' = -\sqrt{2}\, v_1 \end{cases}$$

$$u_1(x) = d_1 e^{\sqrt{2}x}$$

$$v_1(x) = d_2\, e^{-\sqrt{2}x}$$

$$Z(x) = \begin{pmatrix} d_1\, e^{\sqrt{2}x} \\ d_2\, e^{-\sqrt{2}x} \end{pmatrix}$$

$$Y(x) = B\, Z(x) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1\, e^{\sqrt{2}x} \\ d_2\, e^{-\sqrt{2}x} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} d_1 e^{\sqrt{2}x} - (\sqrt{2}-1)\, d_2\, e^{-\sqrt{2}x} \\ (\sqrt{2}-1)\, d_1\, e^{\sqrt{2}x} + d_2\, e^{-\sqrt{2}x} \end{pmatrix} \overset{=}{\otimes}$$

Per confrontarlo con quello trovato prima

$$c_1 = d_1 \qquad c_2 = -(\sqrt{2}-1)\, d_2 \iff d_1 = c_1\,, \quad d_2 = -(\sqrt{2}+1)\, c_2$$

$$\circledast = \begin{pmatrix} c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x} \\ (\sqrt{2}-1) c_1 - (\sqrt{2}+1) c_2 e^{-\sqrt{2}x} \end{pmatrix}$$

TORNA IL RISULTATO DI $\circledast$

IN GENERALE SE M è DIAGONALIZZABILE E SE DEVO RISOLVERE (⇐ due autovalori reali distinti)

$$Y' = MY$$

CONVIENE DIRE CHE $M = B D B^{-1}$

$B = \left(e_1 \,|\, e_2 \right)$ e_1, e_2 autovettori $(\neq 0)$ $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$$Z = B^{-1} Y \Rightarrow Z' = DZ \Rightarrow Z(x) = \begin{pmatrix} d_1 e^{\lambda_1 x} \\ d_2 e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix}$$

e $Y(x) = B\, Z(x)$ . . .

COSA SUCCEDE SE M NON HA autov. reali:

(M matrice 2×2)

Per esempio $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $(\ast)$

Posso cercare le sol. complesse e alla fine tornare ai reali.

Nell'esempio $(\ast)$ chi sono "le radici compl." ? (in $\mathbb{C}$)

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = 0 \iff \lambda = 1 \pm i$$

AUTOVETT. (complessi)

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \qquad y = (\lambda - 1)x \iff y = \pm i x$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \|e_1\| = \|e_2\| = \sqrt{2}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{l} Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \\ \|Z\| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2} \\ z = a + ib \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \end{array} \right)$$

$$D = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

$$M = B D B^{-1}$$

$(Y' = B D (B^{-1} Y)$, multiplico per B^{-1})

$$Z(x) = B^{-1} Y \implies Z' = DZ$$

$$Z(x) = \begin{pmatrix} d_1 e^{x+ix} \\ d_2 e^{x-ix} \end{pmatrix} \implies Y(x) = B \begin{pmatrix} d_1 e^{x+ix} \\ d_2 e^{x-ix} \end{pmatrix} =$$

$\cos(x) + i \sin(x)$ $\qquad$ $\cos(x) - i \sin(x)$

$$\frac{e^x}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} = \end{pmatrix} = \frac{e^x}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} d_1 e^{ix} + i d_2 e^{-ix} \\ i d_1 e^{ix} + d_2 e^{-ix} \end{pmatrix} =$$

$$\frac{e^x}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}(d_1+id_2)\cos(x)+(id_1+d_2)\sin(x)\\(id_1+d_2)\cos(x)+(-d_1-id_2)\sin(x)\end{pmatrix}$$

Pongo $\quad c_1=\dfrac{d_1+id_2}{\sqrt{2}} \qquad c_2=\dfrac{id_1+d_2}{\sqrt{2}}$

se ricavo d_1 e d_2 posso scrivere la sol. in termini di c_1 e c_2 e ricavo la seconda componente della sol.

$$\begin{pmatrix}u(x)\\v(x)\end{pmatrix}=e^x\begin{pmatrix}c_1\cos(x)+c_2\sin(x)\\ ? \qquad\qquad ?\end{pmatrix}$$

FACENDO I CALCOLI SI DEVE RIOTTENERE LA FORMULA VISTA ALL'INIZIO

IDEA Se M ho due autovalori complessi $\lambda_{12}=a+ib$

$\Rightarrow$ $b=$ "velocità di rotazione angolare" $\quad a=$ "fattore di espansione"

$$Z' = DZ \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$z_1' = \lambda_1 z_1 \implies z_1 = d_1 e^{\lambda_1 x}$$

$$z_2' = \lambda_2 z_2 \implies z_2 = d_2 e^{\lambda_2 x}$$