COME SI IMPOSTA IN GENERALE IL PROBLEMA

$$Y' = AY + B \quad \text{in } \mathbb{R}^N$$

$A \to e^A$?? (l'esponenziale di A)

Ricordo che se A è una matrice $N \times N$ si def.

$$\|A\| = \text{minima } c \text{ tale che } \|Ax\|_N \le c\,\|x\|_X$$

$$= \max \frac{\|Ax\|_N}{\|x\|_N} \quad (x \neq 0) = \max \{ \|Ax\| \,,\ \|x\| = 1 \}$$

e che vale: Date A, B matrici $N \times N$

$$\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$$

dim. dato $x \in \mathbb{R}$ $\|ABx\|_N \le \|A\|\,\|Bx\|_N \le \|A\|\,\|B\|\,\|x\|_N$

$$\Rightarrow \|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$$

Dato A, $n \in \mathbb{N}$ considero

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots \cdot A}_{n \text{ volte}} \qquad A^0 = I$$

$$S_n = A^0 + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} + \dots + \frac{A^n}{n!}$$

Voglio fare "$\lim_{n \to \infty} S_n$" $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$?! $= e^A$

DIMOSTRERÒ CHE "componente per componente" $(S_n)_{ij} \to (e^A)_{ij}$
$i,j = 1 \dots n$

<u>INFATTI</u> si vede facilmente (dalla def.) che $|a_{ij}| \leq \|A\|$
$\forall\, i j$. Allora se prendo $\left|(A^n)_{ij}\right| \leq \|A^n\| \leq \|A\|^n$

$$\Rightarrow \sum_0^{\infty} \left| \left(\frac{A^n}{n!}\right)_{ij} \right| \leq \sum \frac{\|A\|^n}{n!} \leftarrow \text{CONVERGE A } e^{\|A\|}$$

$\Rightarrow \forall\, i j = 1 \dots N$ la serie $\sum_0^{\infty} \left(\frac{A^n}{n!}\right)_{ij}$ è ASS CONV.

$\Rightarrow$ tale serie converge (anzi si vede che

$$\| e^{A} \| \leq e^{\|A\|} \Big)$$

DUNQUE $$e^{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

<u>Proprietà</u>

- $e^{0} = I$
- Se A e B commutano $e^{A} \cdot e^{B} = e^{A+B}$ (come nel caso "scalare")

<u>Idea</u>:
$$e^{A} \cdot e^{B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} =$$

(prodotto alla Cauchy)

(binomio di Newton) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A+B)^n = e^{A+B}$$

VALE SOLO SE
$AB = BA$

INFATTI

$$(A+B)^n = (A+B)(A+B) \cdots (A+B)$$

$$= A^n + n B A^{n-1} + \cdots$$

SOLO SE $AB = BA$

Dato A consideriamo la funzione $M(x) = e^{xA}$

$$M(x)_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left(\frac{A^n}{n!}\right)_{ij} \quad \text{serie di potenze in } x$$

che ha raggio di conv. infinito : $M(x)$ esiste $\forall x$

$$\sqrt[n]{\left|\frac{A^n}{n!}\right|_{ij}} \leq \sqrt[n]{\frac{\|A\|^n}{n!}} = \frac{\|A\|}{\sqrt[n]{n!}} \to 0$$

Usando i teoremi visti per le serie di potenze (componente per componente) si vede

$$\frac{d}{dx} M(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{A^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} n \frac{A^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1} A^n}{(n-1)!}$$

$$\Rightarrow \quad A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1} A^{n-1}}{(n-1)!} = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n A^n}{n!} = A\, M(x)$$

Dunque (nelle matrici)

$$\boxed{\frac{d}{dx} e^{xA} = A\, e^{xA}}$$

$\Rightarrow$ Se fisso un vettore Y_0 in $\mathbb{R}^N$ e pongo

$$Y(x) = e^{xA}\, Y_0 \qquad (Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N)$$

$$Y'(x) = A\, e^{xA}\, Y_0 = A\, Y(x)$$

$$Y(0) = e^{0A}\, Y_0 = Id\, Y_0 = Y_0$$

QUINDI $e^{xA} Y_0$ è la sol. di

$$\begin{cases} Y' = A Y \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

ANZI SI PUÒ VEDERE CHE se

$A(x) \leftarrow$ matrice $N \times N$ definita per $x \in I$, $B(x) \leftarrow$ vettore in $\mathbb{R}^N$ $x \in I$

continue e voglio risolvere

$$Y' = A(x)\, Y + B(x), \qquad Y(x_0) = Y_0$$

posso scrivere

$$Y(x) = e^{\mathcal{A}(x)} \left(Y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-\mathcal{A}(t)} B(t)\, dt \right)$$

dove $\mathcal{A}(x) = \int_{x_0}^{x} e^{A(t)}\, dt$

Tornando al caso di $A(x) = A$ costante, vediamo qualche altra proprietà di e^A

- Se $A = B D B^{-1} \Longrightarrow$

$$e^A = B\, e^D B^{-1}$$

infatti

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(BDB^{-1})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overbrace{(BD\cancel{B^{-1}})(\cancel{B}DB^{-1}) \cdots (\cancel{B}DB^{-1})}^{n \text{ VOLTE}}}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} B \frac{D^n}{n!} B^{-1} = B\, e^D B^{-1}$$

Allons si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?? $e^A = ??$