ANALISI 1 [1]
VENTIDUESIMA LEZIONE
Integrali impropri

[1] prof. Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata,
Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html
Ricevimento: ogni lunedì, dalle 8.30 alle 11.30

Integrale improprio - caso dell'intervallo illimitato

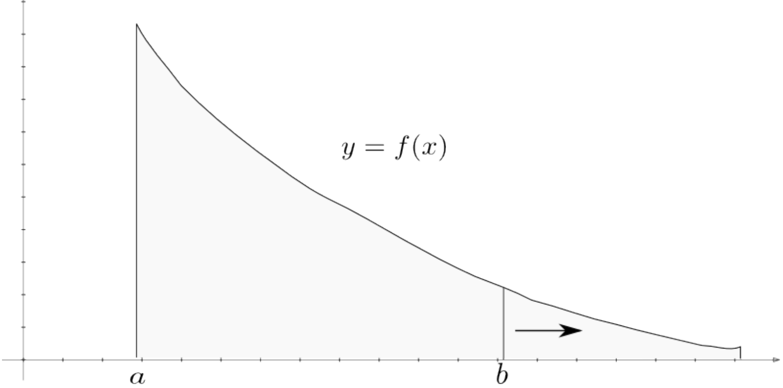
Definizione

Supponiamo (per semplicità) che $f : [a,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *sia continua. Diciamo che* f *ammette integrale in senso improprio, o generalizzato se esiste il limite*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

che viene detto per l'appunto l'integrale improprio di f *su* $[a,+\infty[$.
Diciamo inoltre che

- f *è integrabile in senso improprio, oppure che l'integrale improprio è convergente, se l'integrale improprio esiste finito;*
- *l'integrale di* f *su* $[a,+\infty[$ *è divergente, se l'integrale improprio esiste, ma fa* $+\infty$ *o* $-\infty$.



L'integrale improprio permette di definire l'area di una figura illimitata.
Ci sono FORTI ANALOGIE con le serie (come vedremo tra poco).

Esempio (Importante)

Sia α un numero reale e sia $a > 0$.
Allora la funzione $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ ammette integrale improprio su $[a, +\infty[$ e si ha:

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} +\infty & se\ \alpha \le 1 \\ \dfrac{1}{\alpha - 1}\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\alpha-1} & se\ \alpha > 1 \end{cases}$$

Per esempio se $a = 1$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} +\infty & se\ \alpha \le 1 \\ \dfrac{1}{\alpha - 1} & se\ \alpha > 1 \end{cases}$$

Teorema

*Se $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ è continua e **non negativa** ($f(x) \ge 0$ per ogni x), allora f ammette integrale improprio su $[a, +\infty[$ (finito o infinito).*

Criteri di integrabilità in senso improprio

Teorema (criterio del confronto)

$f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *sono continue e se* $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \geq a$, *allora, in senso improprio,*

$$g \text{ integrabile su } [a, +\infty[\Rightarrow f \text{ integrabile su } [a, +\infty[$$

$$f \text{ non integrabile su } [a, +\infty[\Rightarrow g \text{ non integrabile su } [a, +\infty[$$

Teorema (criterio del confronto asintotico)

$f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *sono continue, se* $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$ *per ogni x e se esiste*

$$l = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

con $l \in]0, +\infty[$ *(l finito e non nullo), allora, in senso improprio,*

$$g \text{ integrabile su } [a, +\infty[\Leftrightarrow f \text{ integrabile su } [a, +\infty[$$

Integrabilità assoluta

Teorema

Se $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *è continua e se*

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty$$

allora f *è integrabile in senso improprio su* $[a, +\infty[$.

Definizione

Se $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *è continua e se*

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty$$

si dice che f *è assolutamente integrabile in senso improprio su* $[a, +\infty[$.

DUNQUE f assolutamente integrabile su $[a, +\infty[\Rightarrow f$ integrabile su $[a, +\infty[$

Integrali impropri e serie

Proprietà

Sia $\{a_n\}$ *una successione e definiamo la funzione "a scalini"* $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *ponendo*

$$f(x) := a_n \quad \textit{se } n \le x < n+1 \qquad \left(f(x) = a_{[x]}\right)$$

Se $a_n \ge 0$ *per ogni n su ha:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} = \int_0^{\infty} f(x)\,dx$$

DIM. Basta fare il limite per $n \to \infty$ nella relazione

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \int_0^{n+1} f(x)\,dx$$

Osservazione

Un' eguaglianza analoga vale anche senza $a_n \ge 0$, *purchè an* $\to 0$.

Teorema (Criterio dell'integrale per le serie)

Suupponiamo che $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *sia una funzione non negativa e decrescente (e per semplicità continua). Per ogni n intero poniamo*

$$a_n := f(n)$$

Allora

$$\sum_{n=0^\infty} a_n < +\infty \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$$

DIM

- Notiamo che al posto di zero ci potrebbe essere un $n_0 \geq 0$.
- Il teorema sopra ci fornisce un altro modo di dimostrare il carattere della serie armonica.

Integrale improprio - caso dell'intervallo limitato

Definizione

Supponiamo (per semplicità) che $f :]a,b]$ *sia continua (il caso interessante è quello in cui* f *non è limitata vicino ad* a*). Diciamo che* f *ammette* ***integrale in senso improprio, o generalizzato*** *su* $]a,b]$ *se esiste il limite*

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx.$$

che viene detto per l'appunto l'integrale improprio di f *su* $]a,b]$*.*
Diciamo inoltre che

- f *è* ***integrabile in senso improprio****, oppure che l'integrale improprio è* ***convergente****, se l'integrale improprio esiste finito;*
- *l'integrale di* f *su* $]a,b]$ *è* ***divergente****, se l'integrale improprio esiste, ma fa* $+\infty$ *o* $-\infty$*.*

Esempio (Importante)

Sia α *un numero reale e sia* $a > 0$.
Allora la funzione $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ *ammette integrale improprio su* $]0, a]$ *e si ha:*

$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha}(a)^{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

Per esempio se $a = 1$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

Teorema

Se $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *è continua e* ***non negativa*** *(*$f(x) \geq 0$ *per ogni* x*), allora* f *ammette integrale improprio su* $]a, b]$ *(finito o infinito).*

Criteri di integrabilità in senso improprio

Teorema (criterio del confronto)

$f, g :]a, b] \to \mathbb{R}$ *sono continue e se* $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in]a, b]$, *allora, in senso improprio,*

$$g \text{ integrabile su }]a, b] \Rightarrow f \text{ integrabile su }]a, b]$$
$$f \text{ non integrabile su }]a, b] \Rightarrow g \text{ non integrabile su }]a, b]$$

Teorema (criterio del confronto asintotico)

$f, g :]a, b] \to \mathbb{R}$ *sono continue, se* $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$ *per ogni* x *e se esiste*

$$l = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

con $l \in]0, +\infty[$ *(*l *finito e non nullo), allora, in senso improprio,*

$$g \text{ integrabile su }]a, b] \Leftrightarrow f \text{ integrabile su }]a, b]$$

Integrabilità assoluta

Teorema

Se $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ *è continua e se*

$$\int_a^b |f(x)|\, dx < +\infty$$

allora f *è integrabile in senso improprio su* $]a,b]$.

Definizione

Se $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ *è continua e se*

$$\int_a^b |f(x)|\, dx < +\infty$$

si dice che f *è assolutamente integrabile in senso improprio su* $]a,b]$.

DUNQUE $\quad f$ assolutamente integrabile su $]a,b] \Rightarrow f$ integrabile su $]a,b]$

Definizione

In maniera analoga si definisce l'integrale improprio di una funzione $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ continua. Per farlo si considera

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{c\to b^-} \int_c^b f(x)\,dx.$$

e si riottiene tutto quanto detto in precedenza sostituendo b ad a.

Definizione

Siano $-\infty \le a < b \le +\infty$ e sia $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ continua. Diremo che f ammette integrale improprio in $]a,b[$ se preso un (qualunque) punto c in $]a,b[$ f ammette sia integrale improprio in $]a,c]$, sia integrale improprio in $[c,b[$. In questo caso si pone

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

che evidentemente non dipende dalla scelta c.

La definizione precedente si completa (integrabilità, divergenza) in modo ovvio, come nei casi precedenti.
Notiamo che per definire l'integrale su $]a,b[$ richiediamo che **esistano separatamente** l'integrale vicino ad a e l'integrale vicino a b.
Possiamo dare una definizione ancora più generale.

Definizione

Siano $-\infty \leq a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \leq +\infty$ *e sia* $f :]a,b[\setminus \{x_1, \ldots, x_{n-1}\} \to \mathbb{R}$ *continua. Diremo che* f *ammette integrale improprio in* $]a,b[$ *se per ogni* $i = 0, \ldots, n-1$ f *ammette integrale improprio in* $]x_{i-1}, x_i]$. *In questo caso si pone*

$$\int_a^b f(x)\,dx := \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

Anche in questo caso si chiede l'integrabilità separata (sia da destra che da sinistra) in ogni punto. Non è consentito che "due infiniti si compensino".

Alcune osservazioni sugli integrali impropri

- Come nel caso delle serie la convergenza dell'integrale non implica la sua convergnza assoluta. Si può considerare per esempio la funzione $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ definita su $[0, +\infty[$. DETTAGLI.
- Non è detto che prodotto di funzioni integrabili sia integrabile. Si consideri per esempio $f(x) = g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ su $]0, 1]$.
- Il teorema di Torricelli vale anche nel caso dell'integrale improprio - l'unica differenza è che la funzione integrale non è lipschitziana, pur essendo derivabile e avendo come derivata f (dato che f non è limitata).
- Nell'integrale improprio le singolarità vanno trattate una alla volta. Quindi $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **non è integrabile su** $[-1, 1]$, nonostante che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\, dx \right) = 0$$