__Weierstrass.__ $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continua

Allora f ha massimo: $\exists\, x_M \in [a,b]$

tale che $f(x_M) \geq f(x) \ \forall x \in [a,b]$

$$\iff \boxed{f(x_M) = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)}$$

__Osservazione__ Se $A = A_1 \cup A_2 \Rightarrow$

$$\sup A = \max(\sup A_1, \sup A_2)$$

- $\displaystyle \sup_A f = \max\left(\sup_{A_1} f, \sup_{A_2} f\right)$

Di nuovo METODO DI BISEZIONE

(1) $c = \frac{a+b}{2}$. Vale una delle due

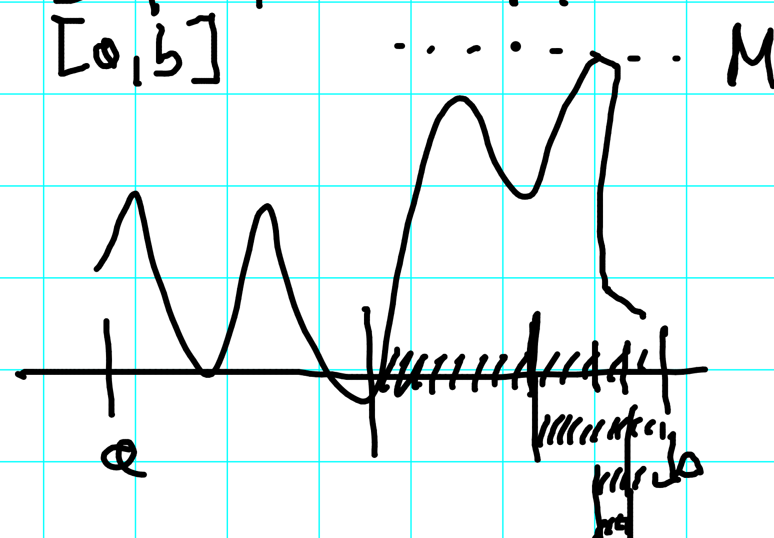
$\underbrace{\sup_{[a,b]} f = \sup_{[a,c]} f}_{\mathrm{I}}$, $\underbrace{\sup_{[a,b]} f = \sup_{[c,b]} f}_{\mathrm{II}}$

nel caso I definisco $a_1 = a$, $b_1 = c$

nel caso II definisco $a_1 = c$, $b_1 = b$

Iterando trovo $\left([a,b] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \cdots\right)$ due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che

- $\{a_n\}$ crescente, $\{b_n\}$ decrescente
- $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$
- $\sup_{[a_n b_n]} f = \sup_{[a,b]} f = M$



Essendo monotone $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ hanno limite $a_n \to \ell_1$, $b_n \to \ell_2$.

Ma poiché $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$

trovo $\underbrace{\ell_1 = \ell_2}_{x_M}$, cioè $a_n \to x_M$, $b_n \to x_M$

VOGLIO DIM. CHE $f(x_M) = M$

Distinguo due casi

$\boxed{M = +\infty}$ FISSO $n \in \mathbb{N}$ Siccome $\sup_{[a_n, b_n]} f = +\infty \Rightarrow$

trovo $x_n \in [a_n, b_n]$ tale che $\boxed{f(x_n) \geq n}$

HO TROVATO $\{x_n\}$ ..

Dato che $a_n \leq x_n \leq b_n \Rightarrow x_n \to x_M$

Dato che f è continua $\Rightarrow f(x_n) \to f(x_M)$

Ma $f(x_n) \geq n \to +\infty$ ASSURDO

$\boxed{M < +\infty}$

$\boxed{M < +\infty}$

FISSO $n \in \mathbb{N}$

$\forall$ Dato che $\sup_{[a_n, b_n]} f = M$

trovo $x_n \in [a_n, b_n]$ tale che

(*) $M - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq M$

$\frac{1}{n} = \varepsilon > 0$

HO TROVATO UNA $\{x_n\}$

Come prima: $x_n \to X_M$ e

per continuità: $f(x_n) \to f(X_M)$

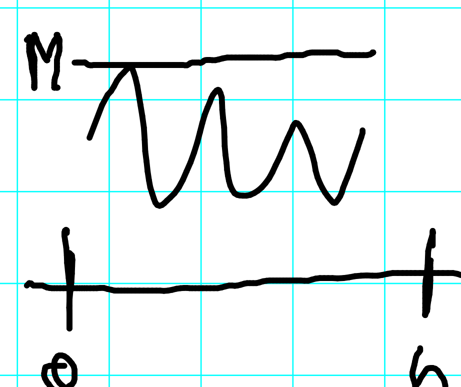
MA per (*)

$f(x_n) \to M$

Per l'unicità del limite $f(X_M) = M = \sup_{[a,b]} f$

Cioè X_M punto di massimo

$f(X_M)$ è il $\max_{[a,b]} f$

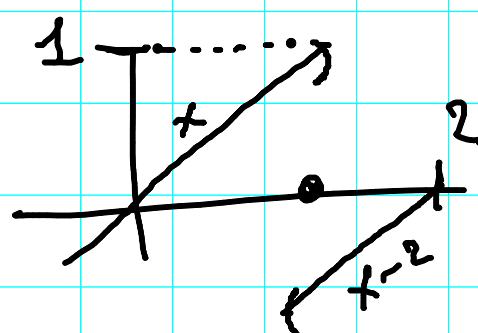


$M = \sup_A f$, $M < +\infty \iff$

- $M \geq f(x)\ \forall x \in A$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_1 : f(x_1) \geq M - \varepsilon$

TUTTE LE IPOTESI DI WEIERSTRASS SONO NECESSARIE

- Se f NON È CONTINUA IL T. NON VALE



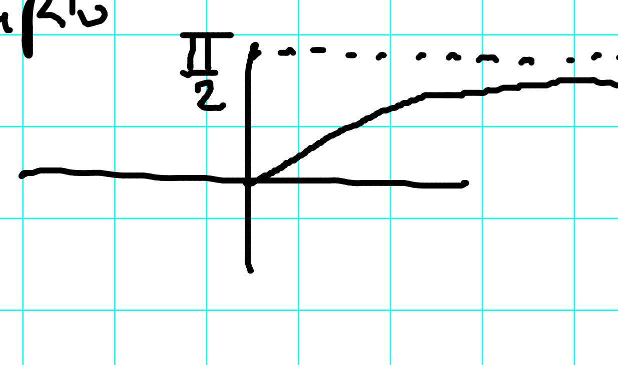
$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \\ x-2 & \text{se } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

$\sup_{[0,2]} f(x) = 1$ MA $\nexists$ x con $f(x) = 1$

- Se l'intervallo NON È LIMITATO IL T. NON VALE

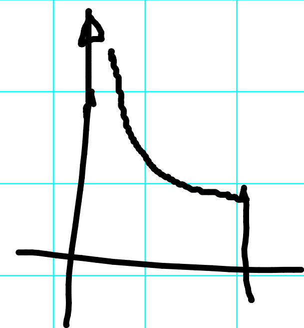
$f(x) = x$ è continua MA NON HA MAX SU $\mathbb{R}$

($\sup f = +\infty$). Altro esempio



$f(x) = \operatorname{arctg}(x)$; $\sup f = \frac{\pi}{2}$ NON È MAX

• SE l'intervallo non è chiuso ...



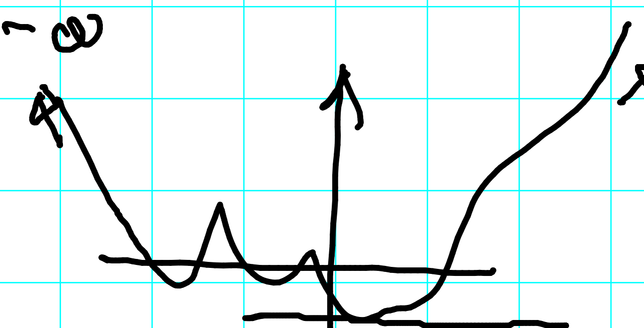
$\frac{1}{x}$ NON HA MAX su $]0,1]$

Si può generalizzare Weierstrass.

<u>Teorema</u> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua

Supponiamo che $\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to -\infty}} f(x) = +\infty$

$\Rightarrow f$ ha minimo



<u>Dim.</u> (mi riconduco a un intervallo limitato)

Dato che $f(x) \to +\infty$ $(x \to \pm\infty)$

Trovo M tale che $\forall x \geq M$

$$f(x) \geq f(0) \quad (x \to +\infty)$$

Analogamente trovo m : $\forall x \leq m$

$$f(x) \geq f(0) \quad (x \to -\infty)$$

Quindi fuori da $[m, M]$ $f(x) \geq f(0)$

(posso supporre che $m < 0 < M$).

Uso Weierstrass in $[m, M]$ $\Rightarrow$ Trovo $\bar{x} \in$

t.c.

$$f(x) \geq f(\bar{x}) \qquad \forall x \in [m, M]$$

(in particolare $f(0) \geq f(\bar{x})$)

Se $x \notin [m, M] \Rightarrow f(x) \geq f(0) \geq f(\bar{x})$

Quindi $f(\bar{x}) \leq f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(\bar{x}) = \min_{\mathbb{R}} f$

CONSEGUENZA. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua

se $\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to -\infty}} f(x) = +\infty \Rightarrow f$ è limitata inf.

se $\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to -\infty}} f(x) = -\infty \Rightarrow f$ è limitata sup

$f: I \to \mathbb{R}$ $\qquad I$ INTERVALLO

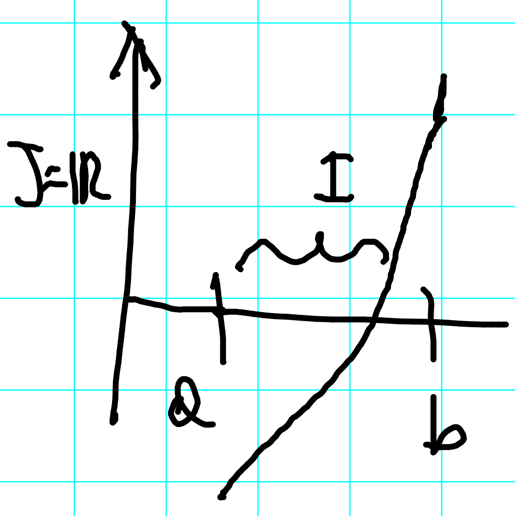
DI ESTREMI $a < b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

- f continua $J = f(I)$ è un intervallo
- f continua e crescente $\Rightarrow$ gli estremi

α, β di J sono dati da

$f(x) \to \alpha$ se $x \to a$

$f(x) \to \beta$ se $x \to b$



$\alpha = -\infty$

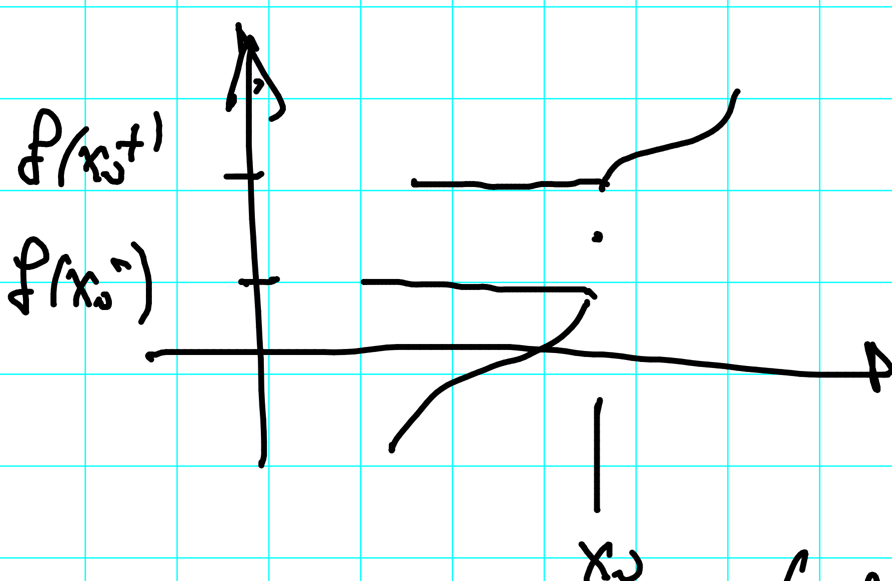
$\beta = +\infty$

· Se f è monotona allora

f è continua $\Longleftrightarrow$ $f(I)$ è un intervallo

$\Longleftarrow$!!

Segue dal fatto che una funzione monotona ha sempre limiti dx / sx $\Rightarrow$ ha SOLO discontinuità di salto.



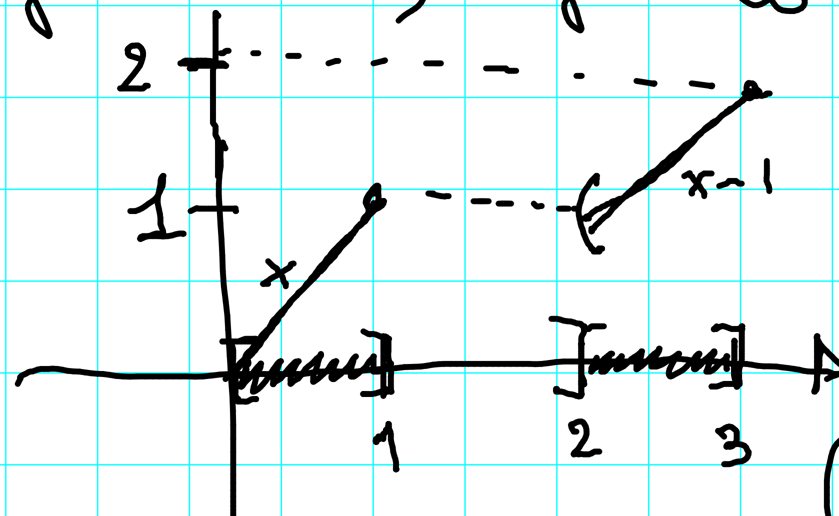
Se è discontinua $f(I)$ NON è un intervallo

(gli mancano $]f(x_0^-), f(x_0^+)[\setminus \{f(x_0)\}$)

CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE INVERSA

Problema: se $f: A \to \mathbb{R}$ è continua e se esiste $f^{-1} \Rightarrow f^{-1}$ continua ?!

NO



(A NON È UN INTERVALLO)

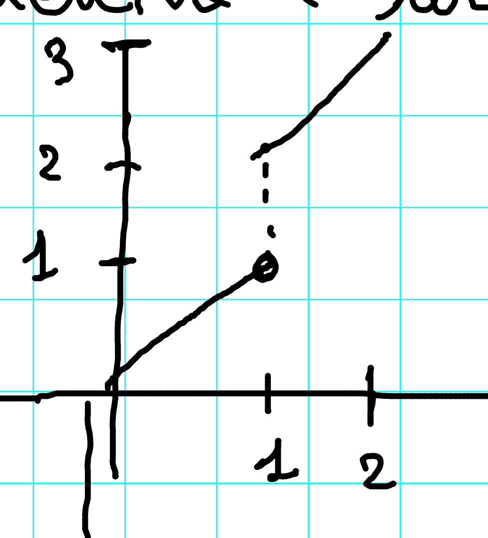
$A = [0,1] \cup]2,3]$ $\quad (2 \notin A)$

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ x-1 & 2 < x \le 3 \end{cases}$$

$f: A \to [0,2]$ è iniettiva e surgettiva.

NON È CONTINUA

IN $x = 1$



f^{-1}

METTO L'IPOTESI:
A = INTERVALLO

Teorema $\qquad I$ INTERVALLO

$f : I \to \mathbb{R}$ continua.

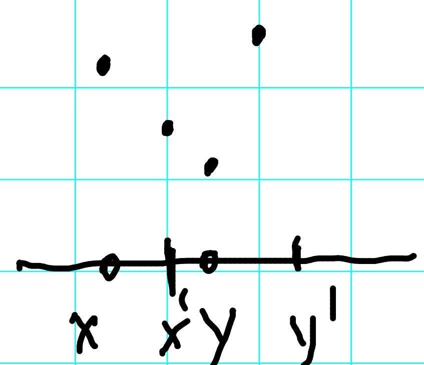
TESI $\quad f$ INIETTIVA $\Leftrightarrow$ f strettamente monotona

Dim. $\quad \Leftarrow$ OVVIA $\qquad$ dimostriamo $\boxed{\Rightarrow}$

Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che non sia monotona $\Rightarrow$ non $\underbrace{\text{è né crescente}}_{1}$ $\underbrace{\text{né decrescente}}_{2}$

1 $\to$ trovo x e y con $x < y$ e $f(x) > f(y)$

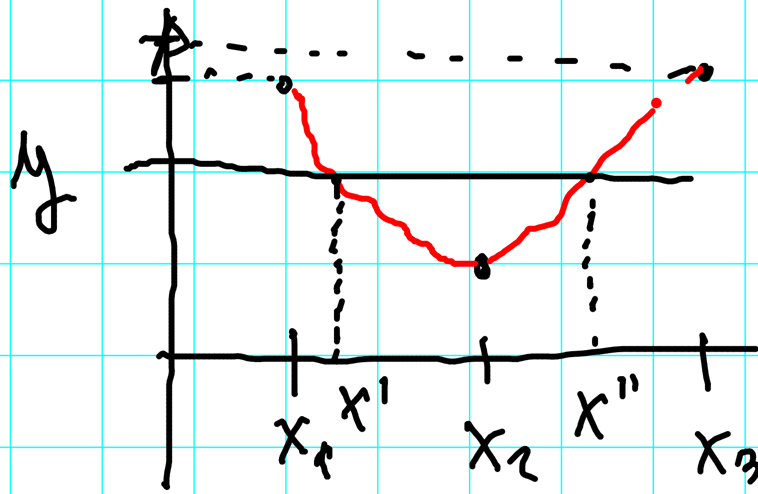
2 $\to$ trovo x' e y' con $x' < y'$ e $f(x') < f(y')$



$\overset{(\dots)}{\rightsquigarrow}$ Ne posso scegliere tre $x_1 < x_2 < x_3$ tali che

PER ESEMPIO SUPPONIAMO $\to$

$$\begin{cases} f(x_2) < f(x_1), \quad f(x_2) < f(x_3) \\ \text{OPPURE} \\ f(x_2) > f(x_1), \quad f(x_2) > f(x_3) \end{cases}$$



NON È INIETTIVA

· Prendo y $\quad f(x_2) < y < \max(f(x_1), f(x_3))$

– Applico il t. valori intermedi in $[x_1, x_2]$

$\Rightarrow \exists\, x' \in \,]x_1, x_2[\,$ t.c. $f(x') = y$

– Stesso discorso su $[x_2, x_3]$:

$\Rightarrow \exists\, x'' \in \,]x_2, x_3[\,: f(x'') = y$

DATO CHE $x' \neq x''$ $\quad f(x') = f(x'')$

f NON È INIETTIVA $\Longrightarrow$ ASSURDO

Teorema $f: I \to \mathbb{R}$ continua, I intervallo, f iniettiva $\Rightarrow \exists\, f^{-1}: f(I) \to I$

INTERVALLO

e f^{-1} CONTINUA.

DIM. Per il teorema precedente f è strett. monotona, $\Rightarrow \exists\, f^{-1}$ strett. monotona

e so che $J = f(I)$ è un intervallo. Dunque

$f^{-1}: J \to I$, monotona (quindi $f^{-1}(J) = I$)

$\Rightarrow$ f^{-1} è continua (per il fatto che l'immagine è un intervallo)

VARIE CONSEGUENZE

$\sqrt[n]{x}$ CONTINUE $\Leftarrow$ x^n CONTINUA

<u>Per esempio</u> $\sqrt{x}$ è continua perché

$f(x) = x^2$ su $[0, +\infty[$ è iniettiva

$f(0) = 0$ $\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Longrightarrow$

$J = f([0, +\infty[)$ è un intervallo e $f^{-1} : J \to [0, +\infty[$ è continua. Inoltre gli estremi di J devono

essere 0 ($f(0)$) e $+\infty$ ("$f(+\infty)$" $= \lim_{x \to +\infty} x^2$)

cioè $J = [0, +\infty[$

"SICCOME x^2 È CONTINUA DEVE ASSUMERE TUTTI I VALORI TRA 0 E $+\infty$"

"Esercizio" sulle successioni RICORSIVE

SI PUÒ DEFINIRE $\{a_n\}$ COME SEGUE

$$\begin{cases} a_0 = 1/2 \\ a_{n+1} = a_n^2 \end{cases}$$

PROBLEMA
esiste $\lim_{n\to\infty} a_n$. ??

Se tale limite esiste ($a_n \to \ell$) deve essere

$a_n^2 \to \ell^2$, $a_{n+1} \to \ell$ dunque

$\ell = \ell^2$ (compreso $\ell = +\infty$)

ℓ può essere $0, 1, +\infty$

(se $\ell \in \mathbb{R}$ $\ell - \ell^2 = 0 \iff \ell = 0, 1$)

Facciamo dei tentativi $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{1}{16}$

... ? sembra andare a zero.

(Mi accorgo che $a_n = \dfrac{1}{2^{(2^n)}} \to 0$)

$n=0 \quad 2^n = 1 \quad 2^{2^0} = 2^1 = 2$

Se non mi accorgo della relazione

posso anche fare un'altro discorso:

Tento di dimostrare che a_n decresce

e tende a zero usando l'induzione.

CONGETTURA $\quad a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n$

$$\Updownarrow$$

$$a_n^2 \leq a_n \quad \forall n$$

$$\Updownarrow$$

$a_n \in [0, 1]$?? PROVIAMO A DIMOSTR. PER INDUZIONE

$\forall n \quad 0 \leq a_n \leq 1$

<u>se $n=0$</u> $\quad 0 \leq \frac{1}{2} \leq 1 \quad$ VERA

se vale per $n \quad 0 \leq a_n \leq 1$

$\Rightarrow \quad a_{n+1} = a_n^2 \Rightarrow 0 \leq a_n^2 \leq 1$

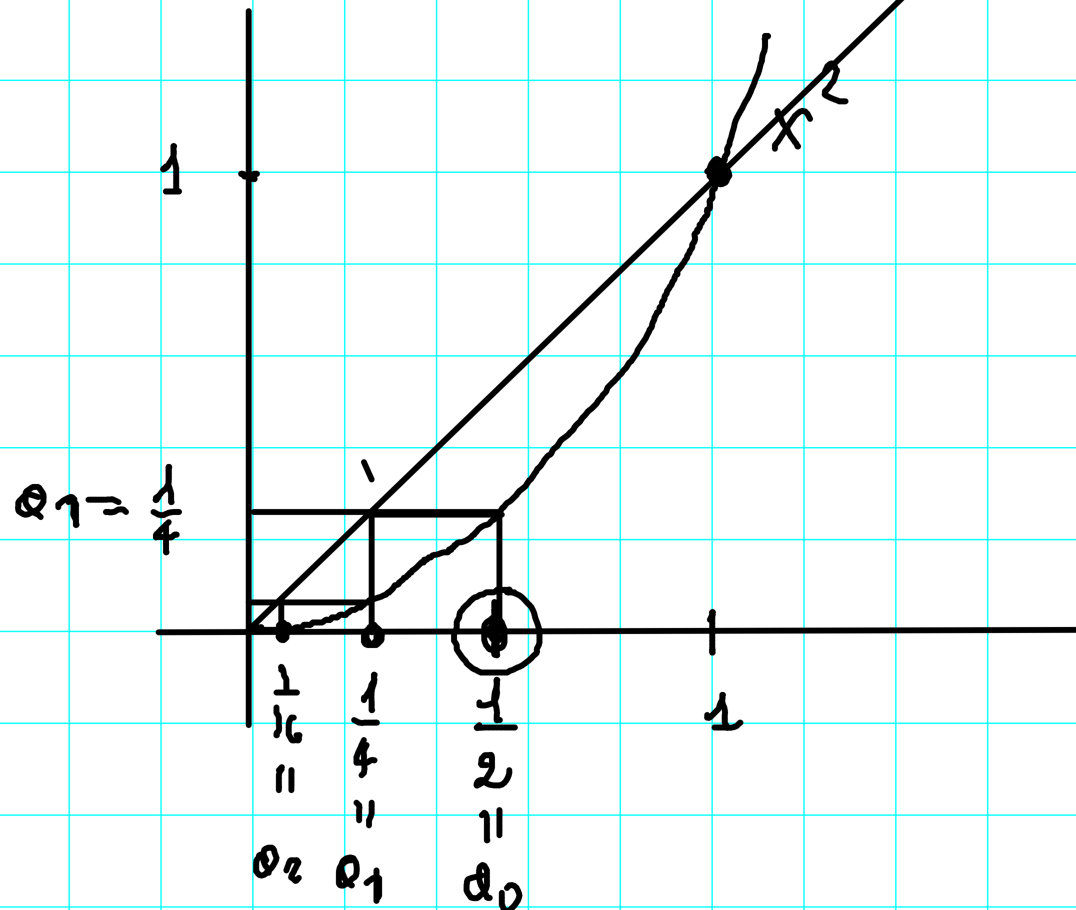
$\left(\text{se } x \in [0,1] \Rightarrow x^2 \in [0,1] \right)$

$\Rightarrow a_{n+1} \in [0,1]$

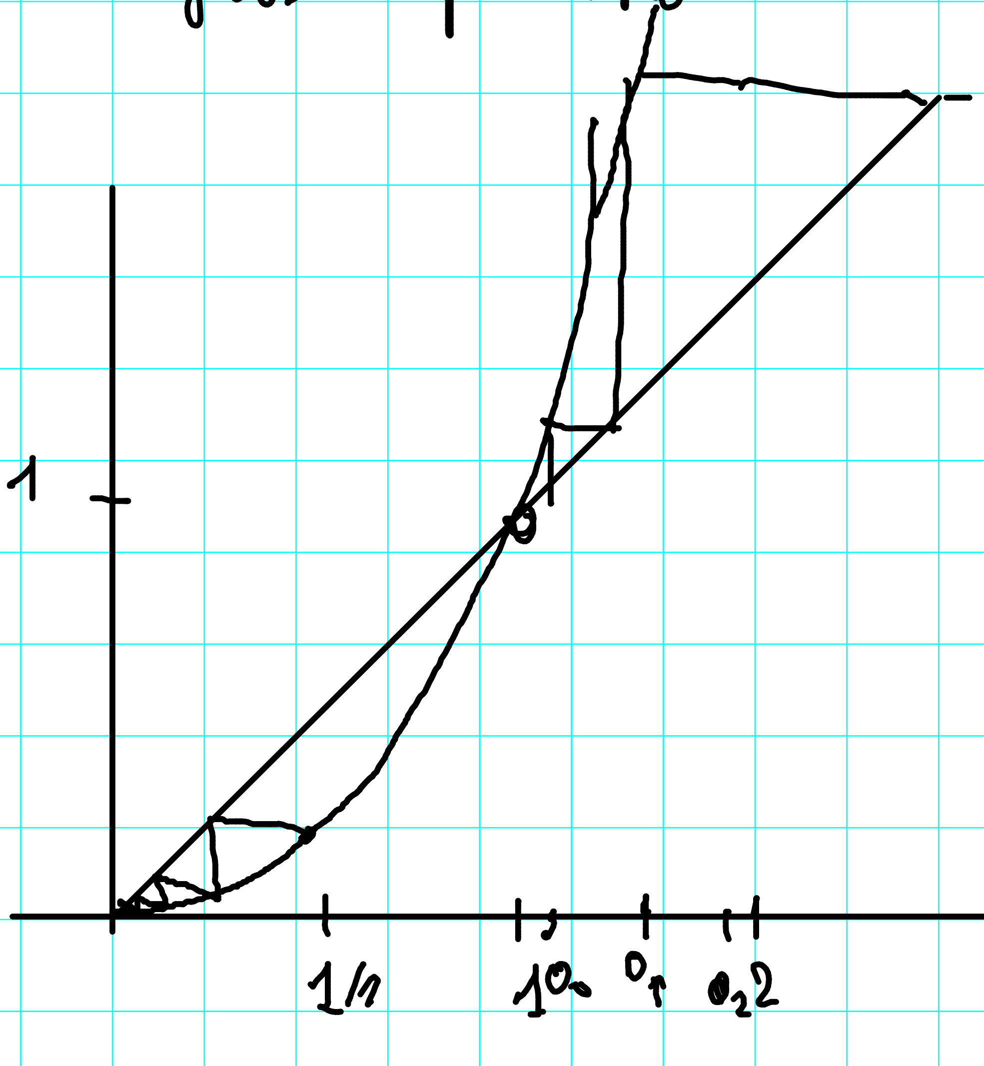
PER IL PRINCIPIO DI INDUZIONE $\Rightarrow \forall n \; a_n \in [0,1]$

$\Rightarrow$ a_n DECRESCE $\Rightarrow$ a_n ha limite $\ell \in [0, 1/2]$

$\Rightarrow$ ℓ deve essere zero



Se fossi partito da $a_0 = 2$



$a_n \to +\infty$

Provate a dim. che se $a_0 = 2$ $\{a_n\}$ cresce e $\to +\infty$

altro esempio

$$\begin{cases} a_0 = 1/2 \\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{1+a_n} \end{cases}$$