ANALISI 1 [1]
UNDICESIMA LEZIONE
DODICESIMA LEZIONE
TREDICESIMA LEZIONE
Derivata - definizione e teoremi di calcolo delle derivate
Massimi e minimi relativi e teorema di Fermat
Teorema di Lagrange
Monotonia e segno della derivata
Teorema di de l'Hôpital
Formula di Taylor

[1] prof. Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata,
Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html
Ricevimento: ogni lunedì, dalle 8.30 alle 11.30 (nei periodo di lezione; altrimenti su appuntamento da concordare per esempio via e-mail)

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ con $I$ intervallo e sia $x_0 \in I$

## Definizione (Derivata)

*Diciamo che $f$ è* ***derivabile in $x_0$*** *se esiste finito*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

*che viene allora detto* ***derivata di $f$ in $x_0$*** *e indicato con uno dei simboli*

$$f'(x_0) \qquad \dot{f}(x_0) \qquad \left.\frac{d}{dx} f(x)\right|_{x=x_0}$$

*Diciamo che $f$ è* ***derivabile in $I$*** *se $f$ è derivabile in ogni $x_0$ di $I$. In questo caso risulta definita la nuova funzione $f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$ detta* ***derivata di $f$***.

## Definizione (derivate di ordine superiore)

*Se $f$ è derivabile in $I$ e a sua volta $f'$ risulta derivabile in $x_0$ (in $I$) allora la derivata di $f'$ (a rigore $(f')'$ ) viene detta* ***derivata seconda*** *di $f$ e indicata con $f''$.*
*Analogamente si definisce la derivata terza come $f''' = (f'')'$ e così via.*
*Per indicare la generica derivata di ordine n si utilizzano le scritture*

$$f^{(n)} \qquad \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

*(nella prima notazione le parentesi sono necessarie per non confondere la derivazione con la potenza)*
*Per convenzione la derivata di ordine zero $f^0$ coincide con la funzione di partenza $f$*

## Osservazione (derivata e retta tangente)

- *Se $f$ è derivabile in $x_0$ allora*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$ DIM

*cio'e la retta $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ approssima la funzione a meno di un infinitesimo di ordine superiore a $x - x_0$.*

- *Viceversa se $y = m(x - x_0) + q$ è una retta passante per $(x_0, f(x_0)$ tal che*

$$f(x) = m(x - x_0)q + o(x - x_0)$$

*allora necessariamente $p = f(x_0)$, $f$ è derivabile in $x_0$ e $m = f'(x_0)$.* DIM

## Definizione (retta tangente)

*Se $f$ è derivabile in $x_0$, la retta $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ viene detta retta tangente al grafico di $f$ nel punto $(x_0, f(x_0))$.*

## Teorema

*Se $f$ è derivabile in $x_0$ allora $f$ è continua in $x_0$* DIM

## Nota

*Il teorema precedente non è invertibile.*
*La funzione $f(x) = |x|$ fornisce un esempio di funzione continua che, almeno nello zero, non è derivabile.* DIM

## Teorema (linearità)

*Supponiamo che $f$ e $g$ siano derivabili in $x_0$ e che alpha e $\beta$ siano due numeri reali. Allora $\alpha f + \beta g$ è derivabile in $x_0$ e*

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

La dimostrazione è conseguenza immediata dell proprietà dei limiti.

## Teorema (derivata del prodotto)

*Supponiamo che $f$ e $g$ siano derivabili in $x_0$.*
*Allora $fg$ è derivabile in $x_0$ e*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

DIM

*In termini sintetici, se $f$ e $g$ sono derivabili ovunque:*

$$(fg)' = f'g + fg'$$

## Teorema (derivata del quoziente)

*Supponiamo che $f$ e $g$ siano derivabili in $x_0$ e che $g(x_0) \neq 0$.*
*Allora $\frac{f}{g}$ è derivabile in $x_0$ e*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

DIM

*In termini sintetici, se $f$ e $g$ sono derivabili ovunque e $g \neq 0$ ovunque:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

*In particolare, se $f$ è diversa da zero in $x_0$ (ovunque)*

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)} \qquad \left(\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}\right)$$

## Teorema (derivata della composizione)

*Supponiamo che abbia senso la composizione $f \circ g$. Supponiamo che $f$ sia derivabile in $x_0$ e che $g$ sia derivabile in $g(x_0)$.*
*Allora $f \circ g$ è derivabile in $x_0$ e*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

DIM

*In termini sintetici, se $f$ e $g$ sono derivabili ovunque:*

$$(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$$

### Teorema (derivata della funzione inversa)

*Supponiamo che* $f$ *sia invertibile e derivabile in tutto l'intevallo* $I$.
*Supponiamo che* $f'(x : 0(\neq 0$ *e poniamo* $y_0 := f(x_0)$
*Allora* $f^{-1}$ *è derivabile in* $y_0$ *e*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

DISEGNO

*In termini sintetici, se* $f'$ *è ovunque diversa da zero*

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

# derivate delle funzioni elementari

| funzione | derivata | insieme di derivabilità |
|---|---|---|
| $x^n \quad (n \in \mathbb{N})$ | $nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^n \quad (n \in \mathbb{Z}, n < 0)$ | $nx^{n-1}$ | $]0, +\infty[$ |
| $x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 1)$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ | $[0, +\infty[$ |
| $x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha < 1)$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ | $]0, +\infty[$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\sin(x)$ | $\cos(x)$ | $\mathbb{R}$ |
| $\cos(x)$ | $-\sin(x)$ | $\mathbb{R}$ |
| $\tan(x)$ | $1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ | $\{x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, n \in \mathbb{Z}\}$ |
| $\ln(x)$ | $\dfrac{1}{x}$ | $]0, +\infty[$ |
| $\arcsin(x)$ | $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $]-1, 1[$ |
| $\arccos(x)$ | $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $]-1, 1[$ |
| $\arctan(x)$ | $-\dfrac{1}{1+x^2}$ | $\mathbb{R}$ |

## Definizione (massimi e minimi relativi)

*Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e sia $x_0$ un punto di $A$. Diremo che $x_0$ è un **punto di massimo (minimo) relativo per $f$** se*

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in A \; |x - x_0| < \delta \to f(x) \leq f(x_0) \qquad (f(x) \geq f(x_0)).$$

*(esiste $\delta > 0$ tale che $x_0$ è un punto di massimo (minimo) per $f$ ristretta a $A \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$).* DISEGNO

*In tal caso $f(x_0)$ si dice massimo relativo (minimo relativo) per $f$.*

## Teorema (di Fermat)

*Sia $f : I \to \mathbb{R}$ dove $I$ è un intervallo e sia $x_0$ un punto di $I$ **diverso dagli estremi** di $I$. Se $x_0$ è un punto di massimo oppure minimo relativo per $f$ e se $f$ è derivabile in $x_0$, allora $f'(x_0) = 0$.*

DIM

## Osservazione

*Tutte le ipotesi del teorema di Fermat sono necessarie* ESEMPI.
*Dunque i punti di massimo e minimo relativo (tra cui quelli assoluti) vanno cercati:*

- *Tra i punti dell'intervallo aperto in cui $f$ è derivabile e $f'$ fa zero.*
- *Tra i punti in cui $f$ non è derivabile.*
- *Tra gli estremi dell'intervallo.*

## Definizione

*Un punto $x_0$ in cui $f'(x_0) = 0$ si dice* ***punto stazionario per $f$***.

Il teorema di Fermat afferma dunque che i punti di massimo/minimo relativo INTERNI all'intervallo (cioè non estremi) sono punti stazionari per $f$

## Osservazione

*Non è vero in generale che i punti stazionari sono sempre punti di massimo o minimo relativo, come mostra la funzione $f(x) = x^3$* $x^3$. *Il punto $0$ è di flesso per la funzione $x^3$ (c'é un cambio tra concavità e convessità ...)*

## Teorema (di Lagrange)

*Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, con $a < b$ numeri reali. Se $f$ è continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$, allora esiste un punto (intermedio) $c \in ]a,b[$ tale che*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

DIM

## Osservazione

*Dal punto di vista grafico il teorema di Lagrange afferma che c'è un punto $c$ interno all'intervallo tale che la retta tangente al grafico di $f$ per $(c, f(c))$ è parallela alla retta che congunge i due punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.*

DISEGNO

## Teorema (monotonia e segno della derivata)

*Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *(*$a < b$ *in* $\mathbb{R}$*) e supponiamo che* $f$ *sia continua in* $[a,b]$ *e derivabile in* $]a,b[$*. Allora*

$$f \text{ è crescente } \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in ]a,b[$$

*Analogamente*

$$f \text{ è decrescente } \Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in ]a,b[$$

DIM

## Osservazione

*Crescenza e decrescenza vanno intese in senso debole: dire che* $f$ *è crescente significa*

$$\forall x,y \quad x \leq y \to f(x) \leq f(y)$$

*(e il viceversa per la decrescenza).*
*Quindi una funzione costante è sia crescente che decrescente.*

## Conseguenza

*Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *(*$a < b$ *in* $\mathbb{R}$*) e supponiamo che* $f$ *sia continua in* $[a,b]$ *e derivabile in* $]a,b[$*. Allora*

$$f \text{ è costante } \Leftrightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in ]a,b[$$

## ATTENZIONE

*L'affermazione sopra può essere falsa se* $f$ *non è definita su un intervallo. Si provi per esempio a fare il grafico della funzione*

$$f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

DISEGNO

Nel caso della monotonia stretta vale solo un'implicazione.

## Teorema

*Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *(*$a < b$ *in* $\mathbb{R}$*) e supponiamo che* $f$ *sia continua in* $[a,b]$ *e derivabile in* $]a,b[$*. Allora*

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in ]a,b[ \Rightarrow f \text{ è strettamente crescente}$$

*mentre*

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in ]a,b[ \Rightarrow f \text{ è strettamente decrescente}$$

## Osservazione

*In effetti la funzione* $f(x) = x^3$ *è strettamente crescente ma non ha derivata strettamente positiva, essendo che* $f'(0) = 0$ DISEGNO.
*Dunque nel teorema preceente non valgono le frecce "*$\Leftarrow$*".*

# Varianti del teorema di Lagrange [2]

## Teorema (di Rolle)

*Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*, con* $a < b$ *numeri reali. Se* $f$ *è continua in* $[a,b]$ *e derivabile in* $]a,b[$ *e se* $f(a) = f(b)$*, allora esiste un punto (intermedio)* $c \in ]a,b[$ *tale che*

$$f'(c) = 0$$

È un caso particolare del teorema di Lagrange.

## Teorema (di Cauchy)

*Siano* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$*, con* $a < b$ *numeri reali. Supponiamo* $f, g$ *continue in* $[a,b]$ *e derivabili in* $]a,b[$ *e supponiamo che* $g'(x) \neq 0$ *per ogni* $x$ *in* $]a,b[$*. Allora* $g(b) \neq g(a)$ *ed esiste un punto (intermedio)* $c \in ]a,b[$ *tale che*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Questo è una generalizzazione del teorema di Lagrange DIM

[2] nel libro non ci sono (almeno non esplicitamente)

## Teorema (di de l'Hôpital)

*Siano $f$ e $g$ definite in $]x_0, x_1[$ dove $x_1 > x_0$ e $x_0$ può essere sia un numero reale che $-\infty$.*

*Supponiamo che l'espressione $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ sia una forma indeterminata del tipo $\dfrac{0}{0}$ oppure $\dfrac{\infty}{\infty}$, CIOÈ che*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \to x_0^+} g(x) = 0 \quad o \quad \lim_{x \to x_0^+} |f(x)| = +\infty \text{ e } \lim_{x \to x_0^+} |g(x)| = +\infty$$

*Supponiamo anche che $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in ]x_0, x_1[$ e che esista il limite*

$$l = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \text{(}l\text{ può essere finito o infinito)}$$

*Allora* $$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

DIM

Una conseguenza, abbastanza semplice del teorema di de l'Hôpital è il seguente in cui si prova che la derivata in un punto si può ottenere come limite delle derivate nei punti vicini (a patto che questo limite esista).

## Teorema

*Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo $I$. Sia $x_0$ un punto di $I$ e supponiamo che*

- *$f$ sia continua in $I$;*
- *$f$ sia derivabile in $I \setminus \{x_0\}$;*
- *esista il limite $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f'(x) = l$.*

*Allora $f$ è derivabile in $x_0$ e $h'(x_0) = l$.* DIM

## Nota

*I teoremi di del l'Hôpital non sono invertibili: si possono trovare esempi di funzioni $f$ e $g$ per cui $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ammette limite ma $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ no.*

## Definizione (Polinomio di Taylor)

*Sia $f : I \to \mathbb{R}$, dove $I$ è un intervallo , sia $x_0 \in I$ e sia $n$ un numero intero. Supponiamo che $f$ ammetta derivata fino all'ordine $n$ vicino a $x_0$. Chiamiamo* ***polinomio di Taylor di ordine $n$ per $f$ nel punto $x_0$*** *il polinomio*

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

*che si può scrivere in forma sintetica*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

*Notiamo che $x_0$ è fissato e quindi la dipendenza di $P_n$ da $x$ è, per l'appunto, di tipo polinomiale.*

## Osservazione

*Il polinomio di Taylor di ordine zero è la costante $f(x_0)$. Il polinomio di Taylor di ordine uno è la retta tangente:*

$$P_0(x) = f(x_0) \qquad\qquad P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Vedremo che il polinomio di Taylor di ordine $n$ è il polinomio di grado minore o eguale a $n$ che meglio approssima $f(x)$ vicino a $x_0$ (in un senso da precisare). Una prima proprietà di $P_n$ è la seguente.

## Proprietà

*Il polinomio $P_n$ è l'unico polinomio $P$ tale che*

$$grado(P) \leq n, \quad P(x_0) = f(x_0), P'(x_0) = f'(x_0), \ldots, P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

*cioè è l'unico polinomio di grado minore o eguale a $n$ che nel punto $x_0$ ha le stesse derivate di $f$, dalla zeresima (corrispondente a $f$) all'ennesima.*

DIM

## Teorema (formula di Taylor con resto di Peano)

*Siano $I$ un intervallo , $x_0 \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione che ammetta derivata fino all'ordine $n$ vicino a $x_0$.*
*Allora*

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n)$$

*Viceversa se $P$ è un polinomio di grado minore o eguale a $n$ tale che*

$$f(x) = P(x) + o((x - x_0)^n)$$

*allora necessariamente $P = P_n$ (unicità del polinomio di Taylor).*

DIM

## Osservazione

*Ricordiamo che la scrittura* $f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n)$ *significa*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \quad \left( \lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \right)$$

*Se chiamiamo* ***resto $n$-esimo*** *di Taylor per $f$ nel punto $x_0$ dove l'espressione*

$$R_n(x) := f(x) - P_n(x)$$

*allora il teorema precedente equivale a dire che* $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$, *cioè*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

*Allora un nome più corretto per il teorema precedente sarebbe:*

*"**valutazione secondo Peano del resto di Taylor**"*

*(il resto è il resto e cioè $R_n$ - Peano dice che $R_n(x) = 0((x-x_0)^n)$).*

## Teorema (formula di Taylor con resto di Lagrange)

*Siano $I$ un intervallo, $x_0 \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione che ammetta derivata fino all'ordine $n+1$ in $I$.*
*Allora per ogni $x$ in $I$ esiste un punto $\xi$ compreso tra $x$ e $x_0$ tale che*

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

*Detto altrimenti esiste un punto $\xi$ compreso tra $x$ e $x_0$ tale che*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

DIM

Anche in questo caso sarebbe meglio dire

“**valutazione secondo Lagrange del resto di Taylor**”

## Osservazione

*Se $n = 0$ il teorema sopra restituisce il Teorema di Lagrange.*

# Sviluppi di Taylor in zero delle principali funzioni

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

e se, per qualunque $\alpha \in \mathbb{R}$, si pone $\binom{\alpha}{n} := \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$, allora:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}x^n + o(x^n)$$

Il seguente teorema dice che per vedere se un punto stazionario è di massimo o minimo rel. si può esaminare il segno della prima derivata non nulla in $x_0$.

### Teorema (Condizioni sufficienti di max/min relativo)

*Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione definita in un intervallo e sia $x_0 \in I$. Supponiamo che $f$ sia derivabile $n$ volte in $I$ ($n \geq 2$) e che tutte le derivate di $f$, dalla prima alla $(n-1)$-esima siano nulle in $x_0$, mentre la $n$-esima non lo è:*

$$f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

*(quindi $x_0$ è un punto stazionario). Allora* DIM

- *Se $n$ è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$, allora $x_0$ è punto di minimo relativo per $f$;*
- *Se $n$ è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0$, allora $x_0$ è punto di massimo relativo per $f$;*
- *Se $n$ è dispari, allora $x_0$ non è né di massimo né di minimo relativo per $f$.*

Nella pratica, la natura dei punti stazionari si riesce spesso a determinare esaminando il segno della derivata prima nei punti vicini a $x_0$ piuttosto che le derivate successive in $x_0$. Ciò non toglie che il criterio precedente sia importante (soprattutto la sua generalizzazione in più variabili).