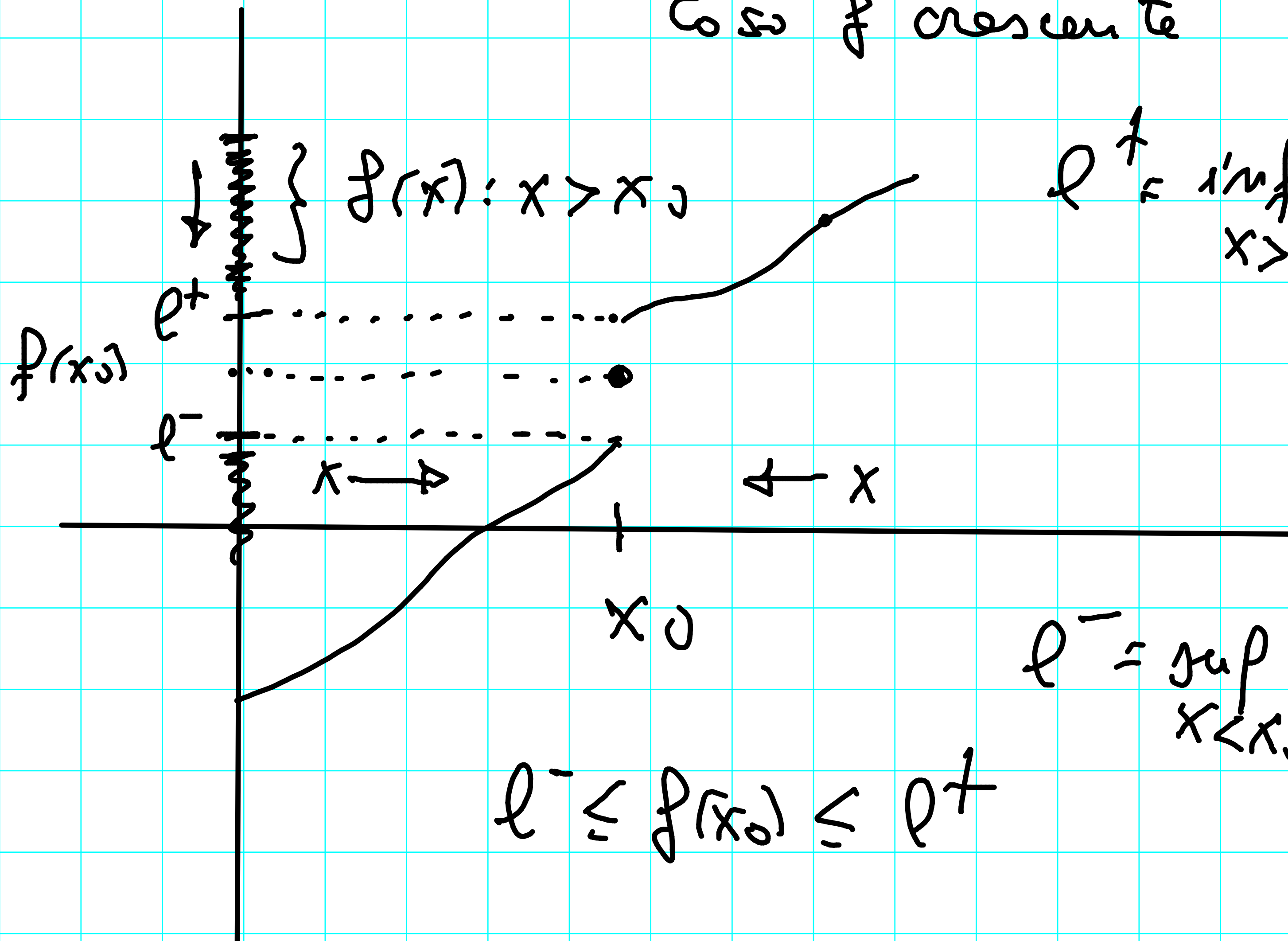
Caso f crescente



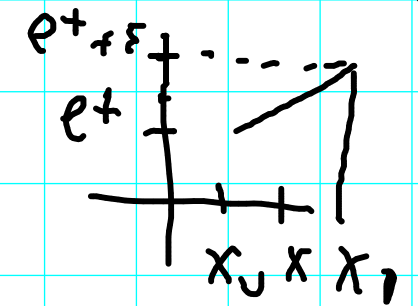
$$\ell^+ = \inf_{x > x_0} f(x)$$

$$\ell^- = \sup_{x < x_0} f(x)$$

$$\ell^- \leq f(x_0) \leq \ell^+$$

limite (dx/sx) di f monotona. ~~es~~

DIM. caso f crescente, $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \inf_{x>x_0} f(x)$



Chiamo $\ell^+ = \inf_{x>x_0} f(x)$.

$\boxed{\text{So}}$ che (a) $\ell^+ \le f(x) \quad \forall x > x_0$

(b) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, x_1 > x_0 : \ f(x_1) < \ell^+ + \varepsilon$

Per dimostrare che ℓ^+ = limite destro

devo prendere una qualsiasi x_n con $x_n > x_0$, $x_n \to x_0$

e dimostrare che $f(x_n) \to \ell^+$.

Prendiamo x_n come sopra.

(1) $f(x_n) \geq \ell^+$ (per la a)

(2) Fisso $\varepsilon > 0$. TROVO x_1 come da (b).

Dato che $x_n \to x_0^+$ DEFINITIVAMENTE $x_0 < x_n < x_1$

$$\Rightarrow \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{detto prima}}}{\ell^+ \leq} f(x_n) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ crescente}}}{\leq} f(x_1) \leq \ell^+ + \varepsilon$$

DUNQUE $\forall \varepsilon > 0$ DEFINITIVAMENTE

$$\ell^+ - \varepsilon \leq f(x_n) \leq \ell^+ + \varepsilon$$

cioè $f(x_n) \to \ell^+$

Dato che (x_n) è arbitraria $\Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \to x_0^+} \ell^+$

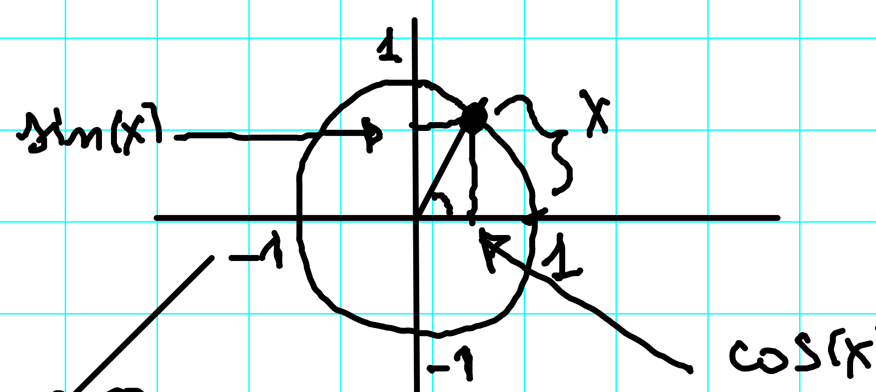
(IN REALTÀ HO supposto $\ell^+ < +\infty$ — si può fare anche il caso $\ell^+ = +\infty$, ...)

$\uparrow$ trattazione

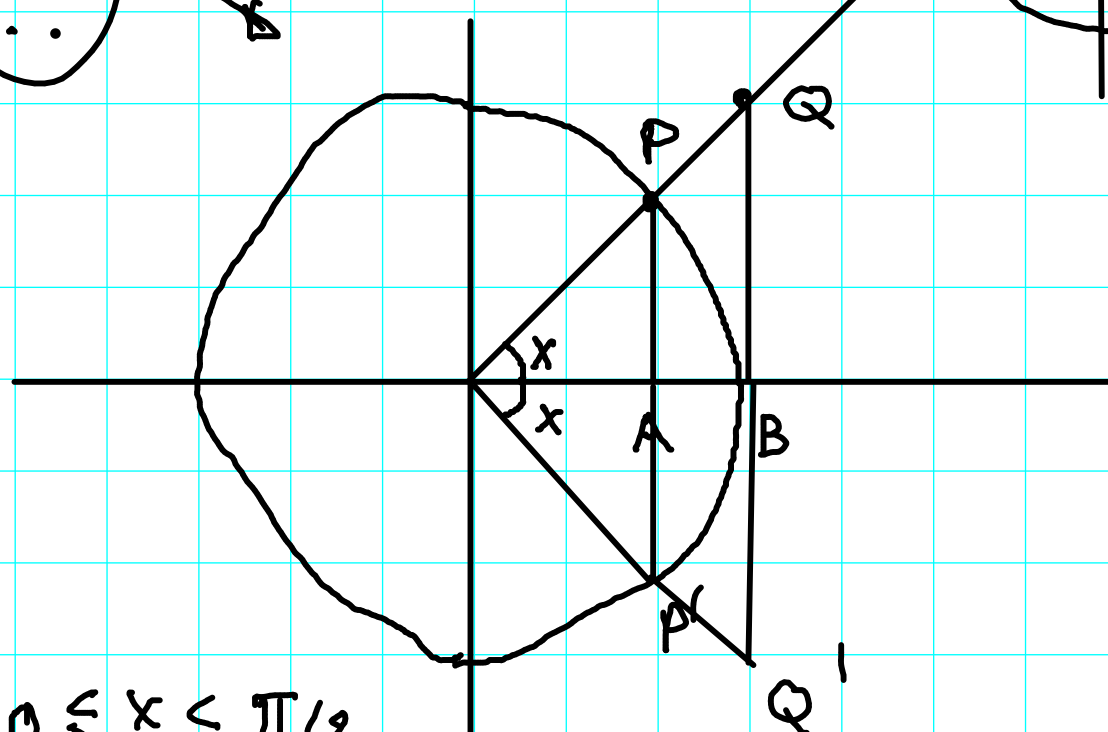
$$\frac{\sin(x)}{x} \to 1 \quad \text{per } x \to 0$$

PRELIMINARE $\quad \lim_{x \to 0} \sin(x) = 0$

Chi è $\sin(x)$?



(!!)



$P = (\cos(x), \sin(x))$

$B = (1, 0)$

$A = (\cos(x), 0)$

$Q = (1, \tan(x))$

se $0 \le x \le \pi/2$

$$\underbrace{\overline{AP}}_{\sin(x)} \le x \le \overline{BQ} \Leftarrow \overline{P'P} \le 2x$$

(per andare da P' a P la strada più breve è il segmento)

$x \leq \overline{BQ} \Leftarrow$ settore $\subset$ triangolo

$\frac{x}{2}$ = area settore

$\frac{\overline{BQ}}{2}$ = area triangolo

Allora finché $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\sin(x) \leq x \leq tg(x)}$$

CONSEGUENZE (1)

se $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow |\sin(x)| \leq |x|$

$$\Rightarrow \sin(x) \xrightarrow{x \to 0} 0$$

(2)

$$\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)} \longrightarrow 1$$

(3) (divido la disuguaglianza per x)

$$\boxed{\frac{\sin(x)}{x} \leq 1 \leq \frac{\sin(x)}{x}\,\frac{1}{\cos(x)} \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2} \quad e \quad -\frac{\pi}{2} < x < 0}$$

(la seconda dis. segue dal fatto che divido per $x < 0$ la disuguaglianza opposta)

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$$

$$\cos(x) \to 1$$

$\Downarrow$ (se $x \to 0$)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

(4) $\dfrac{1-\cos(x)}{x^2} =$ (moltiplico e divido per $1+\cos(x)$)

$$\frac{1-\cos^2(x)}{(1+\cos(x))\,x^2} = \underbrace{\frac{1}{1+\cos(x)}}_{\downarrow \; \frac{1}{2}}\underbrace{\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2}_{\downarrow \; 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sin(x^2)}{x^2} \to 1$$

PONGO $y = x^2$ NOTO CHE $y \xrightarrow{x \to 0} 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$$

(se esistono)

OPPURE

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sin((x-3)^2)}{(x-3)^2} \, , = \lim_{y \to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$$

$y = (x-3)^2$

TENDE A $-\frac{1}{2}$

ALTRO ESEMPIO $\boxed{x \to 0}$

$$\frac{\ln(\cos(x))}{x^2} = \frac{\ln(1+\cos(x)-1)}{x^2} =$$

$$= \underbrace{\frac{\ln(1+\cos(x)-1)}{\cos(x)-1}}_{*} \cdot \frac{\cos(x)-1}{x^2} \to -\frac{1}{2}$$

$y = \cos(x) - 1$, $y \to 0 \Rightarrow * = \frac{\ln(1+y)}{y} \to 1$

STESSO LIMITE (IN TERMINE DI o..)

$$\frac{\ln(\cos(x))}{x^2} =$$

<u>So che</u>

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\ln(1+y) = y + o(y)$$

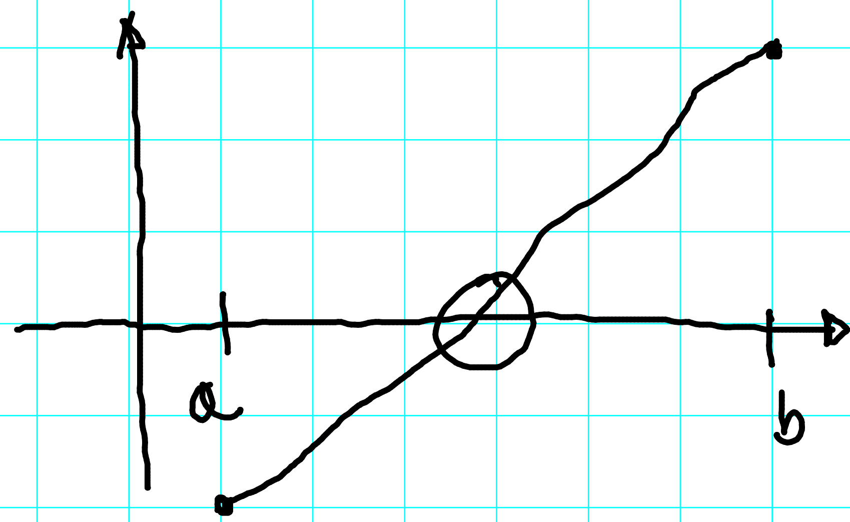
$$\frac{\ln\Big(1 \overbrace{- \frac{x^2}{2} + o(x^2)}^{y}\Big)}{x^2} =$$

$$\frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2) + o\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^2} = \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2) + o\left(O\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right)}{x^2}$$

$-\frac{1}{2} \cdot x^2$, $-\frac{1}{2} = O(1)$

$$= \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2) + o\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{x^2} = \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2) + o(x^2)}{x^2} =$$

$$= \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2} + o(1) \longrightarrow -\frac{1}{2}$$



caso $f(a)<0$

$f(b)>0$

(f continua su $[a,b]$)

$\Rightarrow \exists x_0 : f(x_0)=0$

<u>Dim.</u> Metodo di bisezione

(1) Prendo $c = \dfrac{a+b}{2}$ (pto medio tra a e b)

tre casi: • $f(c)=0 \Rightarrow$ FINE

• $f(c)<0$ passo a $[c,b]$ $a_1=c$, $b_1=b$

• $f(c)>0$ passo a $[a,c]$ $a_1=a$, $b_1=c$

(2) Prendo $c_1 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$, tre casi:

• $f(c_1)=0 \Rightarrow$ FINE

• $f(c_1)<0$ $a_2=c$ $b_2=b_1$

• $f(c_1)>0$ $a_2=a_1$ $b_2=c$

O MI FERMO TROVANDO UNO ZERO PER f O

Iterando $\vee$ trovo due successioni

$\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che

- $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$
- e $b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1})$
- $\underline{f(a_n) < 0}$, $f(b_n) > 0$

Ne segue che $\{a_n\}$ crescente, $\{b_n\}$ decrescente

$$(0<)\, b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \quad (*)$$

$\Rightarrow$ (limite di succ. monotone)

$$a_n \to \ell', \quad b_n \to \ell'' \quad (\ell', \ell'' \in [a,b])$$

Da $(*)$ $\Rightarrow$ $b_n - a_n \to 0 \Rightarrow \ell' - \ell'' = 0 \Leftrightarrow \ell' = \ell'' =: x_0$

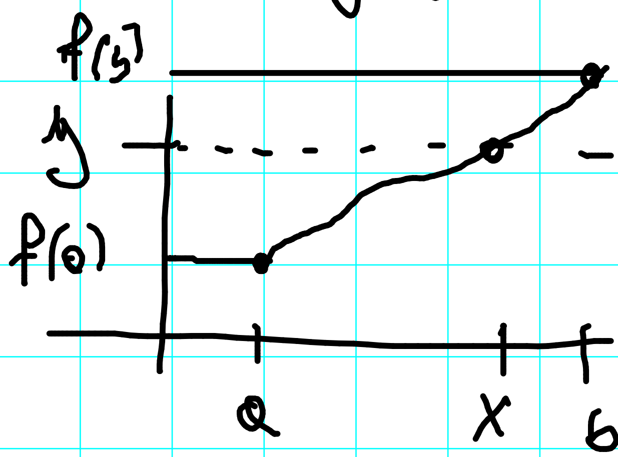
<u>Dato che</u> f è continua $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ $\Rightarrow \boxed{f(x_0) = 0}$

$$0 \geq \lim_{n\to\infty} f(a_n) \qquad \lim_{n \to \infty} f(b_n) \geq 0$$

$(f(a_n) < 0)$ $\qquad$ $(f(b_n) > 0)$

Conseguenze del th. degli zeri / f. continua.

Se $f(a) < y < f(b) \Rightarrow \exists x : f(x) = y$



Dim. Chiamo

$$g(x) = f(x) - y$$

- $g(a) = f(a) - y < 0$
- $g(b) = f(b) - y > 0$

g CONTINUA

Per il t. zeri $\Rightarrow \exists x : g(x) = 0 \iff$

$$f(x) - y = 0 \iff f(x) = y$$

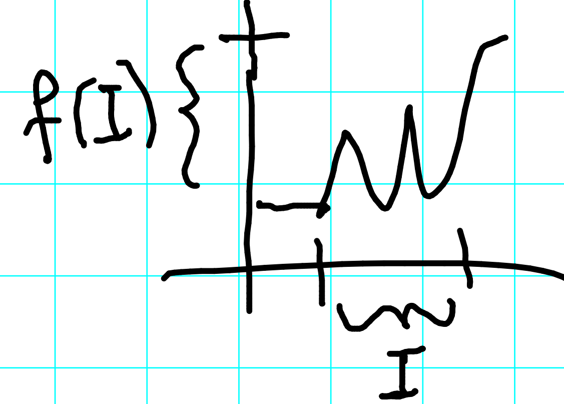
(teorema dei valori intermedi): f continua

se y è compreso tra $f(a)$ e $f(b)$

$\Rightarrow$ y è "assunto" da un x in $[a, b]$

ATTENZIONE y è una ORDINATA, x è un' ASCISSA

ALTRA CONSEGUENZA



$f : A \to \mathbb{R}$ continua

$I \subset A$, I intervallo $\Rightarrow$

$f(I)$ è un intervallo

" f manda intervalli in intervalli "