Il pol. P_n è l'unico di grado $\leq n$

t.c. $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad k=0,\dots,n$

<u>Dim.</u> Prendo un generico polinomio

di grado $\leq n$

$$p(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$$

$$p'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\, a_k (x-x_0)^{k-1}$$

$$p''(x) = \sum_{k=2}^{n} a_k k(k-1)(x-x_0)^{k-2}$$

$\vdots$

$$p^{(h)}(x) = \sum_{k=h}^{n} a_k \overbrace{k(k-1)\cdots(k-h+1)}^{h \text{ fattori}}(x-x_0)^{k-h}$$

dove $h = 0, \dots, n$

$$p^{(h)}(x_0) = a_h\, h(h-1)\cdots 1 = a_h \cdot h!$$

Riassumendo: se $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$

$$p^{(h)}(x_0) = a_h \cdot h! \qquad h = 0 \dots n$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{a_h = \frac{p^{(h)}(x_0)}{h!}}$$

(proprietà dei polinomi)

Se voglio che $p^{(h)}(x_0) = f^{(h)}(x_0)$

$$\Longleftrightarrow \qquad a_h = \frac{f^{(h)}(x_0)}{h!}$$

In qualche senso P_n è "tangente" di ordine n a f in x_0

Taylor (secondo Peano)

$$f(x) = P_n(x) + o\left((x-x_0)^n\right)$$

<u>cioè</u>

$$\circledast \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

(se chiamo $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$

devo dim. che $\dfrac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} \to 0$; RESTO DI TAYLOR DI ORDINE n

Per calcolare tale limite $\circledast$, uso de l'Hô...

(1) Ho una forma $\frac{0}{0}$ dato che $f(x_0) = P_n(x_0)$

posso al rapporto tra le derivate

$$\circledast = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - P_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}$$

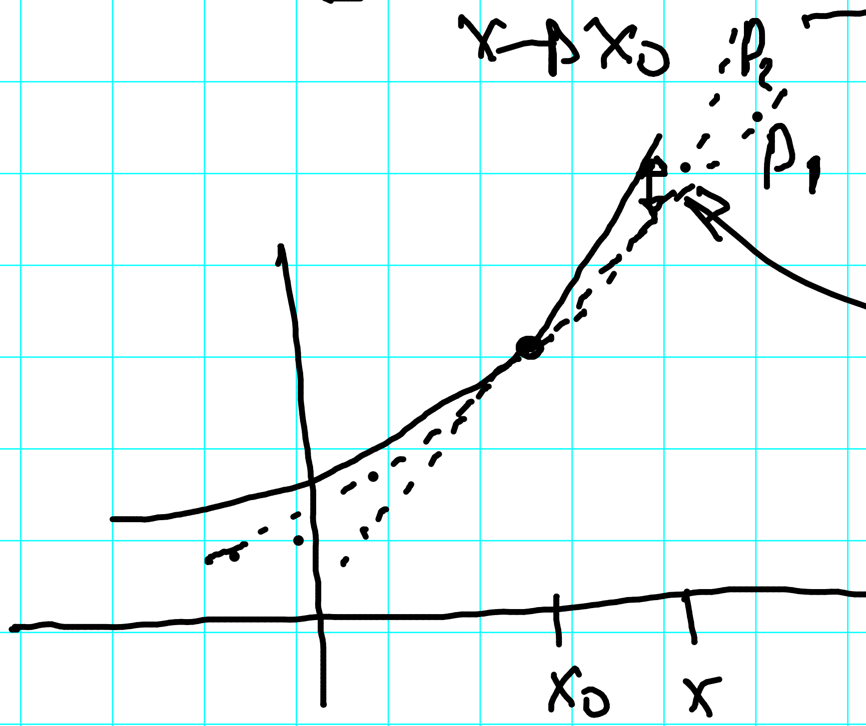
(2) Ho di nuovo $0/0$ $\left(f'(x_0) = P_n'(x_0) \right)$

Di nuovo Hôpital

$$\circledast = \quad = \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - P_n''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}$$

$\vdots$ (itero n volte)

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x) - P_n^{(n)}(x)}{n!} = 0$$



scarto tra f e P_2

$= o(x-x_0^2)$

Esempio $\quad f(x) = e^x \quad (x_0 = 0)$

sapendo che $\quad e^x = 1 + x + o(x)$

Calcoliamo i termini successivi.

$$f'(x) = e^x \longrightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^x \longrightarrow f''(0) = 1$$

$$f^{(n)}(x) = e^x \longrightarrow f^{(n)}(0) = 1$$

DUNQUE

$$e^x = \overbrace{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!}}^{P_n(x)} + o(x^n)$$

$x_0 = 0$

(SVILUPPO DI TAYLOR (Mc. Laurin) IN ZERO di e^x

Proviamo a "calcolare" e a meno di 10^{-3}. Per Taylor (Lagrange)

$$e^x = P_n(x) + \frac{e^{\xi}\, x^{n+1}}{(n+1)!}$$

dove $\xi = \xi_{n,x}$ è compreso tra 0 e x

Prendo $x = 1$ $\qquad 0 < \xi < 1$

$$e = P_n(1) + \boxed{\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}}$$

(err. $< \frac{3}{5040}$)

$$0 \leq \cdot \leq \frac{3}{(n+1)!}$$

Basta scegliere n in modo che

$$\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{1000} \qquad (n+1)! > 3000$$

1 2 6 24 120 720 $\quad 720 \times 7 = 5040 > 3000$

$n = 6$ quindi $e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{720} + \underline{\underline{\text{err.}}}$

DIM. (Formula con resto di Lagrange)

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

$$(R_n(x_0) = R_n'(x_0) = \dots = R_n^{(n)}(x_0) = 0)$$

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1} - (x_0-x_0)^{n+1}} =$$

(applico Cauchy: trovo t_1 compreso tra x e x_0)

$$\frac{R_n'(t_1)}{(n+1)(t_1-x_0)^n} = \frac{R_n'(t_1) - R_n'(x_0)}{(n+1)\left((t_1-x_0)^n - (x_0-x_0)^n\right)}$$

(riapplico Cauchy: $\exists\, t_2$ tra x_0 e t_1)

$$\frac{1}{(n+1)n} \frac{R_n''(t_2)}{(t_2-x_0)^{n-1}} \quad \dots \text{ ITERO } n+1 \text{ VOLTE}$$

trovo $x_0 < t_{n+1} < \dots < t_2 < t_1 < x$ tale che

$$\dots = \frac{R_n^{(n+1)}(t_{n+1})}{(n+1)!}$$

Ho trovato

$$\frac{R_m(x)}{(x-x_0)^{m+1}} = \frac{R_m^{(m+1)}(t_{m+1})}{(m+1)!} =$$

Ma $R_m(x) = f(x) - P_m(x) \Rightarrow$

$$R_n^{(n+1)}(x) = f^{(m+1)}(x) - 0$$

$$= \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}$$

(FINE)

Sviluppo di Taylor di $(1+x)^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

$f(x) = (1+x)^{\alpha}$, $x_0 = 0$

$f(0) = 1$

$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$ $f'(0) = \alpha$

$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$ $f''(0) = \alpha(\alpha-1)$

$\vdots$

$$f^{(k)}(x) = \overbrace{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}^{k \text{ fattori}}(1+x)^{\alpha-k}$$

$$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$$

$$P_n(x) = 1 + \alpha x + \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)x^2 + \frac{1}{6}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{n!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^n$$

se DEFINISCO $\binom{\alpha}{k} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k}$ (generalizza il binom.

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k + o(x^n)$$

(se α è INTERO ≥ 0 allora, per $n \geq \alpha$, $o \equiv 0$

Esempio

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) = -\frac{1}{4} \qquad \binom{1/2}{2} = -\frac{1}{4}\Big/2 = -\frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{8} \ ; \ \binom{1/2}{3} = \frac{3}{8\cdot 6}$$

$f(x) = \sin(x) \qquad x_0 = 0 \qquad f(0) = 0$

$f'(x) = \cos(x) \qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin(x) \qquad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos(x) \qquad f'''(0) = -1$

$f^{IV}(x) = \sin(x)$ SI RIPARTE

$$\Rightarrow \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} \dots\dots$$

$$\sin(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{P_{2n+1}(x)} + o(x^{2n+1})$$

$o(x^{2n+2})$

ANZI è P_{2n+2} (non c'è il termine di grado $2n+2$)