ANALISI 1 [1]
QUINTA LEZIONE

[1]prof. Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata,
Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html
Ricevimento: ogni lunedì, dalle 8.30 alle 11.30

Successioni

Si chiama **successione** di numeri reali una funzione a valori reali il cui dominio sia l'insieme dei numeri interi.
Formalmente $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ o anche $n \mapsto \mathbb{R}$ (dove si sottintende che n indichi una variabile intera).
Tradizionalmente invece di scrivere $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ si indica la successione con

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{o più brevemente con } \{a_n\}$$

In realtà capita spesso di considerare funzioni di variabile intera che non sono definite proprio per tutti gli n. Per questo si estende la nozione di successione a funzioni del tipo $a : \{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\} \to \mathbb{R}$, definite per tutti gli n a partire da un certo n_0 in poi. In questo caso scriveremo

$$\{a_n\}_{n\geq n_0}$$

Per esempio sono successioni:

$$\{n\}\,, \quad \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}\,, \quad \left\{\sqrt[n]{n}\right\}\,, \quad \{\ln(n-3)\}_{n\geq 4}$$

Consideriamo una proprietà $\mathcal{P}(n)$ definita per n intero.
Diciamo che $\mathcal{P}(n)$ vale **definitivamente** se

$$\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \ \mathcal{P}(n) \text{ è vera}$$

($\mathcal{P}(n)$ vale da un certo punto in poi). Per esempio la proprietà:

$$\mathcal{P}(n) = \text{“ } n^2 - 10n + 1 \geq 0 \text{ ”}$$

vale definitivamente in quanto

$$n^2 - 10n + 1 \geq 0 \Leftrightarrow n \geq 5 + \sqrt{24} \Leftrightarrow n \geq 10.$$

Notiamo per esempio che la proprietà

$$\mathcal{Q}(n) = \text{“ } (-1)^n > 0 \text{ ”},$$

pur essendo vera per infiniti n (cioè per tutti gli n pari), non è definitivamente vera, in quanto è falsa per tutti gli interi dispari.

Una proprietà $\mathcal{P}(n)$ definita per n intero è detta valere **frequentemente**, o **per infiniti** n, se

$$\forall n_0 \ \exists n \geq n_0 : \mathcal{P}(n) \text{ è vera.}$$

Quindi, come già detto, $(-1)^n$ è frequentemente > 0 (dato che comunque fissato n_0 in $\mathbb{N}$ c'è un n pari con $n \geq n_0$, e quindi $(-1)^n = 1 > 0$. Peraltro è anche vero che $(-1)^n$ è frequentemente < 0 . Notiamo che:

$$\tilde{}(\mathcal{P}(n) \text{ vale definitivamente}) \leftrightarrow \tilde{}(\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \ \mathcal{P}(n)) \leftrightarrow$$
$$\forall n_0 \ \exists n \geq n_0 : \tilde{}\mathcal{P}(n) \leftrightarrow \tilde{}\mathcal{P}(n) \text{ vale frequentemente}$$

(o anche $\mathcal{P}(n)$ è frequentemente falsa). Analogamente:

$$\tilde{}(\mathcal{P}(n) \text{ vale frequentemente}) \leftrightarrow \tilde{}\mathcal{P}(n) \text{ vale definitivamente}$$

(o anche $\mathcal{P}(n)$ è definitivamente falsa).

Limiti finiti

Definizione

Sia $\{a_n\}$ una successione e sia l un numero reale.
Diciamo che l è il **limite** *di $\{a_n\}$ (oppure che la successione* **tende** *a l) per n* **tendente all'infinito**, *se:*

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \textit{definitivamente } |a_n - l| < \epsilon.$$

Indichiamo questo fatto scrivendo:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l, \qquad \textit{o anche } a_n \to l$$

Quindi "l'operazione di limite" associa ad alcune (non a tutte le) successioni un numero reale. Come vedreno tale numero, se esiste, è unico e dipende dagli **infiniti** valori di $\{a_n\}$.
Espandendo la definizione sopra si ha che a_n tende a l significa:

$$\forall \epsilon > 0 \ \left(\exists n_0 \in \mathbb{N} : (\forall n \geq n_0 \ |a_n - l| < \epsilon)\right)$$

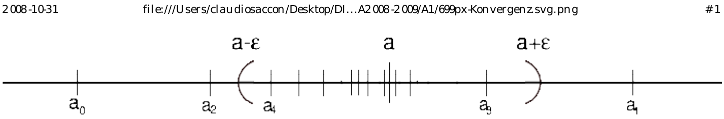
Notiamo che nella scrittura più concisa $a_n \to l$ il fatto che "n tenda all'infinito" è sottinteso. Rimarchiamo anche che è **scorretto** dire "il limite tende..." o scrivere $\lim_{n\to+\infty} \to l$ il limite è un numero e non si muove!!! Bisogna dire:

il limite **è eguale** a l / la successione tende a l

Notiamo anche che nella definizione di limite si può dire anche:

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \text{definitivamente } l - \epsilon < a_n < l + \epsilon.$$

cioè assegnato un errore $\epsilon > 0$ (*piccolo a piacere*) prima o poi il grafico della successione entra nella striscia $l - \epsilon < y < l + \epsilon$ (e non ne esce più).



Limiti infiniti

Definizione

Sia $\{a_n\}$ *una successione.*
Diciamo che il limite di $\{a_n\}$ *per n che tende a più infinito è più infinito, o anche che la successione tende a più infinito, se*

$$\forall c \in \mathbb{R} \quad \textit{definitivamente } a_n \geq c.$$

Indichiamo questo fatto scrivendo:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty, \qquad \textit{o anche } a_n \to +\infty.$$

Diciamo che il limite di $\{a_n\}$ *per n che tende a più infinito è meno infinito, o anche che la successione tende a meno infinito, se*

$$\forall c \in \mathbb{R} \quad \textit{definitivamente } a_n \leq c.$$

Indichiamo questo fatto scrivendo:

$$\lim a_n = -\infty, \qquad \textit{o anche } a_n \to -\infty.$$

Unicità del limite

Indicheremo d'ora in poi con $\mathbb{R}^*$ l'insieme $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. I due elementi $-\infty$ e $+\infty$ non sono numeri – sono semplici simboli (che rimandano alle nozioni ora introdotte). È però possibile estendere anche a loro la relazione d'ordine convenendo che:

$$-\infty < x < +\infty \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(in questo modo $\geq$ rimane riflessiva, antisimmetrica e transitiva).

Teorema

Sia $\{a_n\}$ una successione. Siano l_1 e l_2 in $\mathbb{R}^*$. Allora

$$(a_n \to l_2) \wedge (a_n \to l_2) \to (l_2 = l_2)$$

(se $\{a_n\}$ converge sia a l_1 che a l_2 allora i due limiti coincidono).

Classificazione delle successioni in base al limite

In base alla nozione ora introdotta una successione può avere o anche non avere limite. Nel primo caso diremo che $\{a_n\}$ è **regolare**, mentre nel secondo che $\{a_n\}$ è **irregolare**. Tutto questo indipendentemente dal fatto che il limite sia finito o infinito. Quindi

$$\{a_n\} \text{ è regolare } \Leftrightarrow \exists l \in \mathbb{R}^* : a_n \to l.$$

Tra le successioni regolari distinguiamo poi quello aventi limite finito, che sono dette **convergenti** da quelle tendenti a più/meno infinito che si chiameranno **divergenti** (positivamente/negativamente).

$$\{a_n\} \begin{cases} \text{ha limite} & \to \begin{cases} \text{ha limite finito} & \to \text{convergente} \\ \text{ha limite infinito} & \to \text{divergente} \end{cases} \\ \text{non ha limite} & \to \text{irregolare} \end{cases}$$

COMMENTI

La definizione di limite fornisce un importante strumento concettuale sia nell'ambito dell'*approssimazione* sia più in generale nella descrizione di *fenomeni continui*.
Va notato che nella definizione di limite si dice che la successione si avvicina, con approssimazione arbitraria al suo limite, ma **non si dice** *quanto ci vuole* perchè ciò si realizzi. Detto in maniera formale per ogni approssimazione $\epsilon > 0$ (arbitraria) *prima o poi*, cioè per tutti gli n maggiori o e guali di un opportuno n_1, la successione sarà vicina al suo limite a meno di ϵ – non si dice però come si trovi il'intero n_1 a partire da ϵ.
Vedremo più avanti come, in varie questioni, il solo limite non sarà sufficiente, ma servirà anche valutare la *velocità di convergenza* della successione verso il suo limite.
La situazione tipica in cui servirà questo approccio è il caso dei limiti di *forme indeterminate*.

COMMENTI

Come succede spesso (in matematica) le definizioni non si usano quasi mai direttamente. Quello che si fa normalmente è

- studiare alcuni casi semplici (limiti notevoli) a partire dalla definizione;
- ricavare una serie di proprietà generali della definizione, in modo da elaborare un "*calcolo*".

In questo modo di solito il calcolo di un limite si riduce, mediante i teoremi su somme/prodotti ecc... (usando opportune manipolazioni algebriche) ai limiti di alcuni "pezzi elementari"

Si può già mettere in evidenza che questo modo di procedere sarà lo stesso con le derivate e con gli integrali.

Cominciamo allora ad analizzare le proprietà della nozione di limite.

Limiti e ordine

Supponiamo che $\{a_n\}$ sia una successione avente limite l, con $l \in \mathbb{R}^*$.

1. Se l è finito (cioè se $\{a_n\}$ è convergente), allora $\{a_n\}$ è limitata.
2. (**monotonia del limite**)
   Se frequentemente [2] $a_n \geq 0$, allora $l \geq 0$.
3. (**permanenza del segno**)
   Se $l > 0$, allora definitivamente $a_n > 0$.
4. (**confronto** - due carabinieri)
   Se $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ sono tre successioni tali che

   $$a_n \to l, \ c_n \to l, \quad \text{definitivamente } a_n \leq b_n \leq c_n$$

   allora $b_n \to l$.
   Inoltre se $l = +\infty$ (risp. $l = -\infty$) allora basta la diseguaglianza $a_n \leq b_n$ (basta $b_n \leq c_n$).

NOTA: se $l \in \mathbb{R}$, allora $a_n \to l \Leftrightarrow |a_n - l| \to 0 \Leftrightarrow (a_n - l) \to 0$ in particolare $a_n \to 0 \Leftrightarrow |a_n \to 0$.

[2] a maggior ragione se definitivamente $a_n \geq 0$

Limiti e operazioni

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ siano due successioni convergenti a siano

$$a_n \to l_1, \quad b_n \to l_2.$$

1. $a_n + b_n \to l_1 + l_2$.
2. $a_n \cdot b_n \to l_1 l_2$.
3. Se $l_2 \neq 0$ $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{l_1}{l_2}$. [3]
4. Se $a_n \to 0$ e $\{b_n\}$ è limitata, allora $a_n b_n \to 0$.

NOTA: Da quanto sopra si ottiene che
$a_n - b_n = a_n + (-1)b_n \to l_1 - l_2$,
Inoltre per differenza si generalizzano il teorema di monotonia:

$$a_n \geq b_n \text{ frequentemente } \Rightarrow l_1 \leq l_2$$

e il teorema di permanenza del segno:

$$l_1 < l_2 \Rightarrow \text{ definitivamente } a_n < b_n$$

[3] Da notare che $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ è ben definita quando n è abbastanza grande, per il teorema di permanenza del segno

Esempi

La successione $\{a_n\}$ definita da

$$a_n := n$$

tende all'infinito.

Dimostrazione.
Sia C un numero reale qualsiasi. Sia n_1 un intero con $n_1 > C$, allora:

$$\forall n \; (n \geq n_1) \rightarrow (n > C)$$

Quanto abbiamo appena fatto è la verifica (mediante la definizione) del fatto che

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} n = +\infty$$

$\square$

Esempi

La successione $\{a_n\}$ definita da

$$a_n := \frac{1}{n}$$

tende a zero.

Dimostrazione.

Sia $\epsilon > 0$ un numero positivo qualsiasi. Sia n_1 un intero con $n_1 > \frac{1}{\epsilon}$, allora:

$$\forall n \; (n \geq n_1) \rightarrow \left(\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_1}\right) \rightarrow \left(0 < \frac{1}{n} < \epsilon\right)$$

Abbiamo allora verificato che

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$\square$

Nota: si poteva anche usare il fatto che $n \rightarrow +\infty$ e il teorema sul reciproco dei limiti infiniti (che vedremo tra poco).

Esempi

Sia $A > 0$ un numero reale. Allora

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{A} = 1$$

Dimostrazione.

Bisogna far vedere che, per ogni $\epsilon > 0$ si può trovare $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall n \geq n_1 \qquad 1 - \epsilon < \sqrt[n]{A} < 1 + \epsilon.$$

Ma questo è esattamente quanto dimostrato la lezione precedente (il Lemma), mediante la disuguaglianza di Bernoulli. □

Esempi

La successione $\{a_n\}$ definita da:

$$a_n := (-1)^n$$

(che vale 1 per n pari e -1 per n dispari) NON ha limite.

Dimostrazione.

Supponiamo che esiste un numero l tale che $(-1)^n \to l$. Fissiamo $\epsilon = \frac{1}{2}$. Allora deve esistere n_1 tale che

$$\forall n \geq n_1 \quad |(-1)^n - l| < \frac{1}{2}$$

Ma allora, preso $n \geq n_1$ si ha:

$$\left|(-1)^n - (-1)^{n+1}\right| \leq |(-1)^n - l| \leq + \left|l - (-1)^{n+1}\right| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.$$

Dato che $\left|(-1)^n - (-1)^{n+1}\right| = 2$ se ne ricava $2 < 1$ ASSURDO. $\square$

Limite di successioni monotone

Teorema

Sia $\{a_n\}$ una successione crescente, (decrescente) cioé tale che:

$$a_n \le a_{n+1} \qquad \forall n \qquad\qquad (a_n \ge a_{n+1} \qquad \forall n)\,.$$

Allora $\{a_n\}$ ammette limite e

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \qquad\qquad \left(\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n\right).$$

Questi limiti possono essere finiti o infiniti ($+\infty$ se $\{a_n\}$ é crescente, $-\infty$ se $\{a_n\}$ é decrescente). Dunque:

se $\{a_n\}$ è monotona $\qquad$ *$\{a_n\}$ é convergente $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ é limitata*

Questo teorema é MOLTO IMPORTANTE – é l'unico teorema (tra quelli che vedremo) che garantisce che una successione **ha limite** . Come si vede dalla dimostrazione la sua validitá poggia sull'assioma di completezza dei numeri reali (esistenza di sup/inf!!!)