ESERCIZI SULLE SERIE

Quelle che seguono sono le domande sulle serie prese da alcuni dei compiti passati. Per le soluzioni si rimanda alle rispettive soluzioni dei compiti disponibili in rete Chi volesse può anche cercare altri compiti, oltre a quelli riportati qui-

Premettiamo alcune considerazioni utili allo studio della convergenza di una serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$. Le domande che conviene porsi sono nell'ordine:

- a_n tende a zero? Se non lo fa la serie non può convergere.

  D'ora in poi ammettiamo che $a_n \to 0$

- $a_n \geq 0$? (almeno definitivamente) – in questo caso possiamo utilizzare i criteri per le serie a termini positivi (lo stesso se $a_n \leq 0$).

  Tali criteri mirano a quantificare "quanto velocemente" $a_n \to 0$. Si può provare:

  – il confronto con la serie armonica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, facendo il limite di $n^\alpha a_n$: se si trova un α per cui tale limite esiste finito e non nullo allora la serie converge (diverge) se $\alpha > 1$ ($\alpha \leq 1$); se il limite esiste ma è zero le cose vanno ancora bene per $\alpha > 1$ (convergenza); se il limite è infinito la cosa funzione se $\alpha \leq 1$ (divergenza);

  – il confronto con la serie geometrica, cioè il criterio della radice, oppure quello del rapporto (non c'è grande differenza, solo una questione di calcoli più o meno semplici).

  Tutti gli strumenti imparati per fare i limiti possono risultare utili, Taylor in primo luogo!

  Notiamo per inciso che se la serie è (definitivamente) a termini positivi la convergenza coincide con la convergenza assoluta.

- a_n non è (neanche definitivamente) a segno costante. Allora conviene comunque provare a vedere se la serie converge assolutamente (specialmente se il quesito lo richiede ...). Ciò significa considerare $|a_n|$ al posto di a_n e rifare i tentativi del punto precedente. Se la serie dei $|a_n|$ converge, allora la serie degli a_n converge assolutamente (in particolare converge). Se la serie dei $|a_n|$ diverge, allora sicuramente la serie degli a_n non converge assolutamente, ma non possiamo dire nulla sulla sua convergenza. L'ultima speranza è il criterio di Leibniz.

- La convergenza assoluta non vale. Se la serie è a segni alterni si può vedere se valgono le ipotesi del criterio di Leibniz.

ESERCIZI

In ognuno dei casi seguenti si indichi se la serie converge assolutamente (AC), converge ma non assolutamente (C) oppure non converge (NC) (punti 1.5/-0.75 per ognuna).

8/1/2008

$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^4}$ $\qquad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^4}\right)$

$(c)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sin(n^4)}$ $\qquad (d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n}$

25/1/2008

$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2}{1+n^2}\right)$ $\qquad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(e^{1/n} - 1\right)$

$(c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n^n}$ $\qquad (d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{1+\ln(n)}$

11/2/2008

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$(c)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)-1\right) \qquad (d)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n+1}{4^n-n}$$

3/6/2008

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n^2]{2}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n n}{n^3-n+1}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right)$

23/6/2008

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{n^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)-1\right)$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\left(\frac{3\pi}{n}\right)$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\left(\frac{n+1}{n^3+1}\right)$

14/7/2008

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{n^2}\right)$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{n^n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$

1/9/2008

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\left(\frac{n^2+2}{n^4+2}\right)$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$

15/9/2008

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{2}-1\right)$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n n!}{n^n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\left(\cos\left(\frac{1}{n^2+2}\right)-1\right)$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n n!}{3^n n^n}$

Studiare l'intervallo di convergenza delle seguenti serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n+1},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n2^n},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},\qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n(n-1)},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n.$$

e cercare di determinarne la somma.