11. Calcolo differenziale

Data una funzione f: I $\rightarrow$ **R** definita in un intervallo I e dato un punto $x_0 \in$ I,

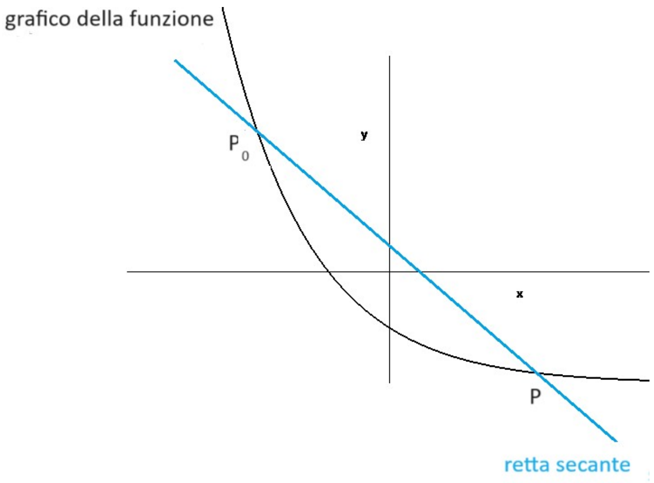
il rapporto

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad , \quad x \in I - \{x_0\}$$

è detto **rapporto incrementale** della funzione f relativo al punto x_0.

Dal punto di vista geometrico questo rapporto è il coefficiente angolare della retta secante s che unisce i punti del grafico di ascissa x e x_0.

Se la funzione f (x) misura lo spazio s percorso da un corpo mobile da un istante "iniziale" x_0 all'istante $x > x_0$, il rapporto incrementale misura la velocità media nell'intervallo di tempo da x_0 ad x.



La funzione si dice **derivabile** nel punto x_0 se esiste finito il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = L \in R$$

Quando questo accade, il valore del limite si dice **derivata** della funzione nel punto x_0 e si indica con il simbolo $f'(x_0)$; altre possibili notazioni per indicare la derivata sono

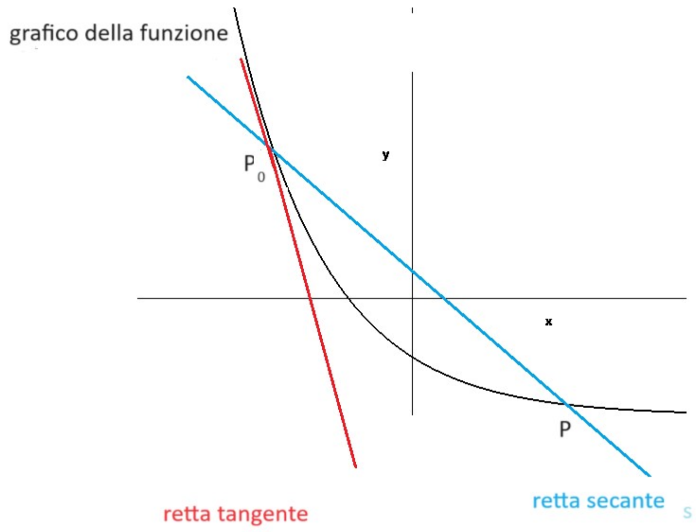
$$\frac{df}{dx}(x_0)\ ,\ Df(x_0)\ ,\ \dot{f}(x_0)\ .$$

Queste notazioni sono state introdotte, rispettivamente, da Lagrange, da Leibniz , da Eulero , da Newton.

Definiamo **retta tangente** al grafico della funzione nel punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$ la retta passante per questo punto e avente $f'(x_0)$ come coefficiente angolare , cioè la retta di equazione

$$\mathbf{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}\ .$$

Questa definizione interpreta la retta tangente come la "posizione limite" che viene ad assumere la retta secante quando il punto P si avvicina al punto fisso P_0 .



Il concetto di retta tangente era già noto prima dell'invenzione del calcolo differenziale, ma limitatamente a curve specifiche (essenzialmente, le coniche). La tangente ad una curva in un suo punto P_0 era definita come la retta che passa per P_0 ed interseca la curva solo in P_0. Nel caso di figure geometriche elementari (in particolare, le coniche) la definizione classica e quella del calcolo differenziale individuano la stessa retta.

Ad esempio, consideriamo la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = R^2$ e prendiamone un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ che non stia sull'asse x, ad esempio con $y_0 > 0$. Il punto appartiene dunque alla semicirconferenza situata nel semipiano delle y positive, che è grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2} \quad , \quad x \in (-R, R).$$

Più avanti faremo vedere che è

$$f'(x_0) = -\frac{x_0}{\sqrt{R^2 - x_0^2}}$$

e dunque l'equazione della retta tangente è data da

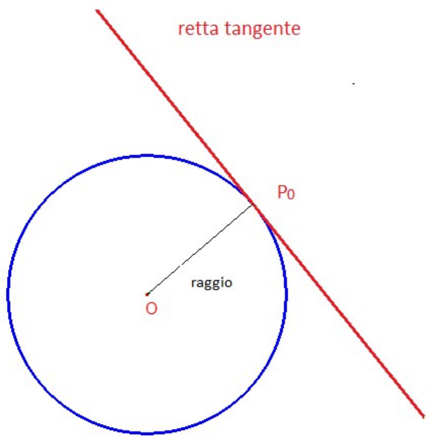
$$y = \sqrt{R^2 - x_0^2} - \frac{x_0}{\sqrt{R^2 - x_0^2}}(x - x_0) .$$

Sostituendo $y_0 = \sqrt{R^2 - x_0^2}$, possiamo riscrivere l'equazione nella forma:

$$x_0 x + y y_0 = R^2.$$

Si può verificare che allo stesso risultato saremmo arrivati partendo da un punto P_0 nel semipiano delle y negative.

Poiché il coefficiente angolare della retta è $-x_0 / y_0$, mentre quello del raggio passante per P_0 è y_0 / x_0, ritroviamo un risultato noto in geometria elementare: la retta tangente ad una circonferenza in un punto è perpendicolare al raggio passante per quel punto. Questo prova che la retta tangente trovata con la definizione che fa uso della derivata coincide con quella elementare nota.



L'equazione trovata ha senso anche per $y_0 = 0$ (cioè $x_0 = \pm R$) e si riduce a $x = x_0$, che è l'equazione di una retta verticale. Per questi due valori di x_0 la derivata perde significato. Riprenderemo questa osservazione più avanti.

Esercizio

Come detto sopra, per una conica la retta tangente in un suo punto è quella che interseca la curva solo in questo punto. Il procedimento analitico che permette di scrivere l'equazione della tangente ad una conica consiste nell'imporre che il sistema tra l'equazione della conica e quella della generica retta $y = m (x - x_0) + y_0$ passante per il punto $P_0 = (x_0 , y_0)$ dato abbia un'unica soluzione. Sostituendo y nell'equazione della conica, si ottiene un'equazione di secondo grado in x con il parametro m . Perché questa abbia un'unica soluzione, occorre imporre che il delta sia nullo. Questa condizione porta a individuare un unico valore di m e dunque un'unica retta tangente. I casi in cui questo non accade (e non si trova un valore per m) corrispondono a quelli in cui la retta tangente non ha l'espressione da cui siamo partiti, in quanto è verticale.

(i) Applicare il procedimento alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = R^2$ e ritrovare il risultato esposto precedentemente.

(ii) Applicare il procedimento alla parabola di equazione $y = a x^2 + b x + c$ ($a \neq 0$) e far vedere che la retta tagente ha per coefficiente angolare $2 a x_0 + b$, che – come vedremo – è proprio la derivata della funzione $f (x) = a x^2 + b x + c$ in $x = x_0$.

Abbiamo visto l'interpretazione cinematica del rapporto incrementale come velocità media di un corpo mobile nell'intervallo di tempo da x_0 ad x: in questo contesto la derivata rappresenta la **velocità istantanea** del corpo all'istante x_0.

Osservazione

Ponendo $x - x_0 = h$, il rapporto incrementale della funzione diventa

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

e la definizione di derivata

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

purché il limite esista e sia finito.

Una funzione si dice **derivabile in un insieme** se è derivabile in ogni punto di questo insieme .

Se f è derivabile in un intervallo I, resta definita una nuova funzione $f': I \to \mathbf{R}$ che ad ogni $x \in I$ associa la derivata di f nel punto x ; a questa nuova funzione f ' diamo il nome di **funzione derivata** o, più semplicemente, derivata di f.

Può accadere che questa funzione f ' sia a sua volta derivabile in un punto $x_0 \in I$: la derivata di f ' in x_0 si chiama derivata seconda della funzione f in x_0 e la indicheremo con uno dei simboli:

$$f''(x_0) \quad , \quad (D^2 f)(x_0) \quad , \quad \frac{d^2 f}{d x^2}(x_0) .$$

Per definizione si ha, dunque:

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} .$$

Si osservi che, per poter parlare di derivata seconda, è necessario supporre che esista la derivata di f , oltre che in x_0, in tutto un intorno del punto.

Se la derivata seconda esiste in tutti i punti dell'intervallo I, resta definita in I la funzione derivata seconda.

Se il procedimento indicato si può ripetere n volte , risultano definite tutte le derivate fino a quella n-esima (o derivata di ordine n): i simboli usati sono

$$f^{(n)}(x_0) \quad , \quad (D^n f)(x_0) \quad , \quad \frac{d^n f}{d\,x^n}(x_0)\ .$$

- **Legame tra derivabilità e continuità**

Se una funzione è derivabile in un punto, in questo punto è anche continua.

ovvero la continuità è una condizione **necessaria** per l'esistenza della derivata.

<u>dimostrazione</u>

Indicato con x_0 il punto in cui la funzione è derivabile, partiamo dall'uguaglianza

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)$$

valida per $x \neq x_0$.

Passando al limite per $x \to x_0$, si ottiene

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)0 = f(x_0),$$

che è appunto la definizione di continuità.

Osservazione

Il risultato precedente non può essere invertito: esistono funzioni continue in un punto, che non sono derivabili in questo punto; dunque la continuità è condizione necessaria ma **non sufficiente** perché esista la derivata.

Ad esempio, la funzione $f(x) = |x|$ è continua nel punto $x = 0$, ma non derivabile.

Per verificare questa affermazione, applichiamo la definizione di derivata e facciamo vedere che non esiste il limite del rapporto incrementale.

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^{\pm}} \operatorname{sgn} x = \pm 1.$$

Esistono vari motivi per cui una funzione continua risulta non derivabile; presentiamo i più comuni.

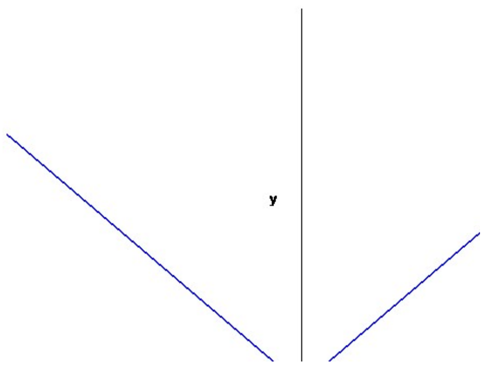
(1)

nel punto x_0 il limite destro e sinistro del rapporto incrementale esistono finiti ma diversi: un punto di questo genere si dice **angoloso.** Un esempio è dato dal punto x = 0 per la funzione | x |, come abbiamo appena visto. In un punto angoloso non esiste la retta tangente, perché non esiste la derivata; il fatto però che esistano finiti il limite destro e quello sinistro del rapporto incrementale permette di parlare di <u>derivata destra</u> $f'(x_0^+)$ e di <u>derivata sinistra</u> $f'(x_0^-)$ nel punto, tra loro distinte; dal punto di vista geometrico

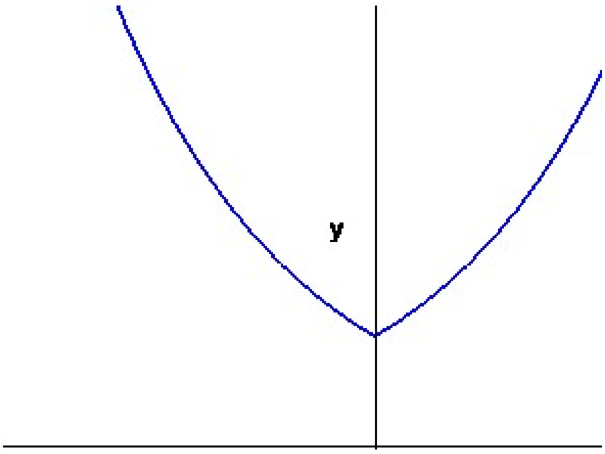
questo porta ad avere, invece della retta tangente, due semirette tangenti con direzioni distinte.

Un altro esempio è dato dalla funzione $e^{|x|}$ in $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{e^{|x|} - 1}{x} = \lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{|x|}{x} = \pm 1.$$



y = | x |



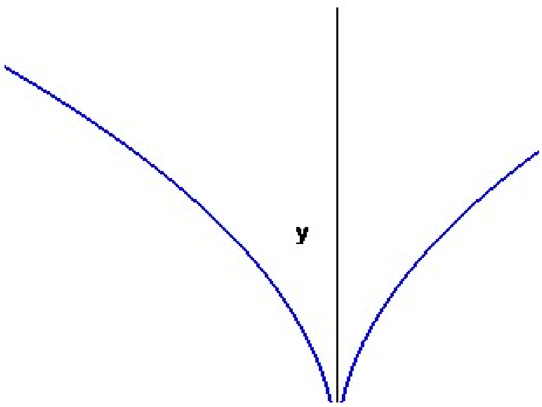
$y = e^{|x|}$

(2)

nel punto x_0 il limite destro e sinistro del rapporto incrementale esistono **non** finiti e diversi tra loro: un punto di questo genere si dice costituire una **cuspide**. Un esempio è dato dal punto 0 per la funzione $\sqrt{|x|}$; infatti si ha:

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{|x|}} = \pm\infty .$$

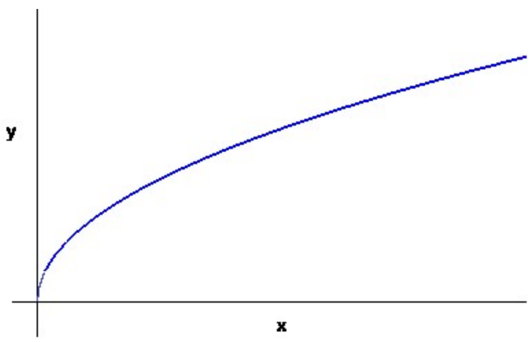
In un punto di cuspide diremo che la retta tangente è <u>verticale</u>.



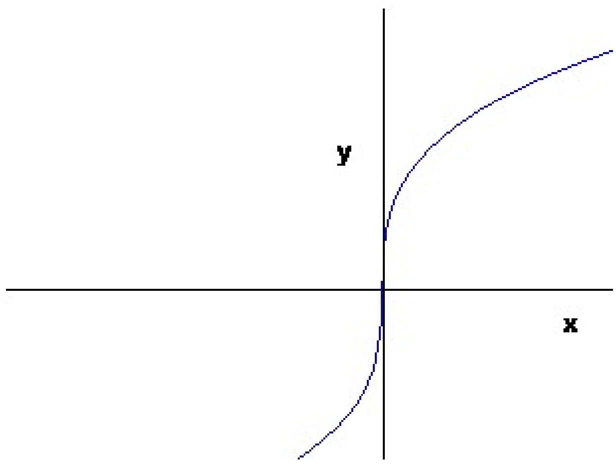
(3)

nel punto x_0 il limite del rapporto incrementale è infinito: un punto di questo genere si dice **a tangente verticale**. Un esempio è dato dal punto 0 per la funzione $\sqrt{x}$ o per la funzione $\sqrt[3]{x}$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$



$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{2/3}} = +\infty .$$



(4)

nel punto x_0 il limite destro e il limite sinistro del rapporto incrementale esistono diversi, uno infinito e l'altro finito: un punto di questo genere si dice **misto.**

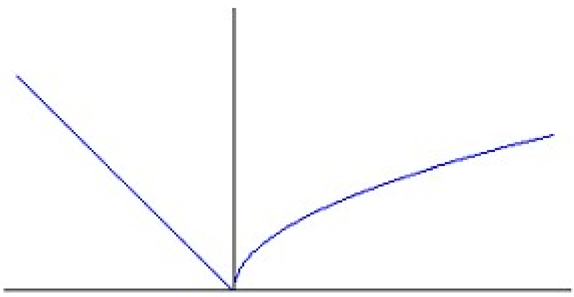
Un esempio è dato dal punto 0 per la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Infatti:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

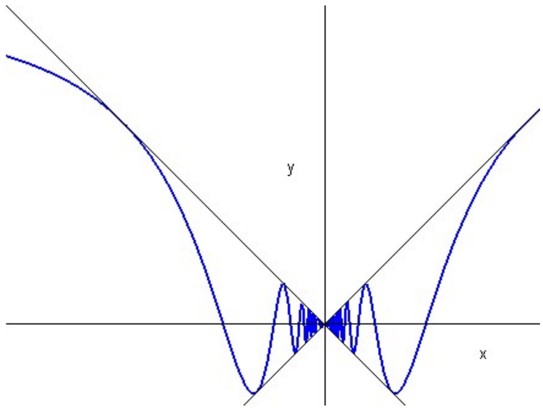
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$



Non rientra in nessuno dei casi precedenti la funzione continua

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

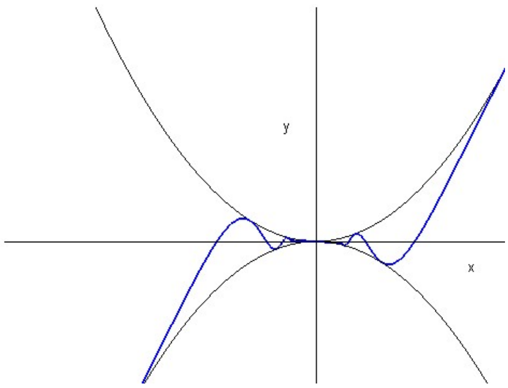
Il rapporto incrementale in $x_0 = 0$ vale sen (1 / x) e questo non ha limite per $x \to 0$ (nemmeno il limite destro o quello sinistro).



E’ invece derivabile in $x_0 = 0$ la funzione continua

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Il rapporto incrementale nell’origine vale $x \operatorname{sen}(1/x)$ e questo limite 0 per $x \to 0$.



Esercizio

Dire se le seguenti funzioni o il loro prolungamento per continuità sono derivabili nel punto indicato :

$x\, e^{-x} \operatorname{arctg} 1/x$ $\qquad x_0 = 0$

$(e^{\sqrt[3]{x-1}} - 1)^4$ $\qquad x_0 = 1$

$\log(1 + x) \log x$ $\qquad x_0 = 0$

$2^x \mid e^{3x} - 1 \mid \; / \; (2^x + 1)$ $\quad x_0 = 0$

$\log \cos x \,/\, \sqrt[3]{\operatorname{sen} x}$ $\quad x_0 = 0$

$\dfrac{e^{|x^2-1|} - 1}{\sqrt[3]{x-1}}$ $\quad x_0 = 1$

Soluzioni

1. punto angoloso
2. $f'(0) = 0$
3. punto a tg. verticale
4. punto angoloso
5. $f'(0) = 0$
6. punto a tg. verticale

Osservazione

Se f è derivabile in x_0, la funzione

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)$$

è infinitesima per $x \to x_0$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = o(1)$$

da cui

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \qquad (*)$$

ovvero

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0). \qquad (**)$$

(da questa uguaglianza si può dedurre la continuità della funzione) .

Le due uguaglianze (tra loro ovviamente equivalenti) costituiscono la **formula del differenziale**. Il fatto che ogni funzione derivabile verifichi la formula è l'enunciato del **teorema del differenziale**.

Il passaggio da x_0 ad x, cioè la variazione $\Delta x = x - x_0$, induce sulla funzione la variazione $\Delta f = f(x) - f(x_0)$.

Una funzione si dice **differenziabile** in un punto x_0 del suo dominio, se esiste una costante k tale che

$$f(x) - f(x_0) = k(x - x_0) + o(x - x_0)$$

cioè se la variazione $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ può essere approssimata con un termine lineare in Δx (cioè proporzionale a Δx) a meno di un errore trascurabile rispetto a tale Δx.

Abbiamo trovato che se la funzione è derivabile, è anche differenziabile, con $k = f'(x_0)$.

Viceversa, è facile provare che una funzione differenziabile è anche derivabile e $f'(x_0) = k$.

Infatti , se f è differenziabile:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{k(x - x_0)}{x - x_0} = k \, .$$

Questo prova che **derivabilità e differenziabilità sono proprietà tra loro equivalenti**.

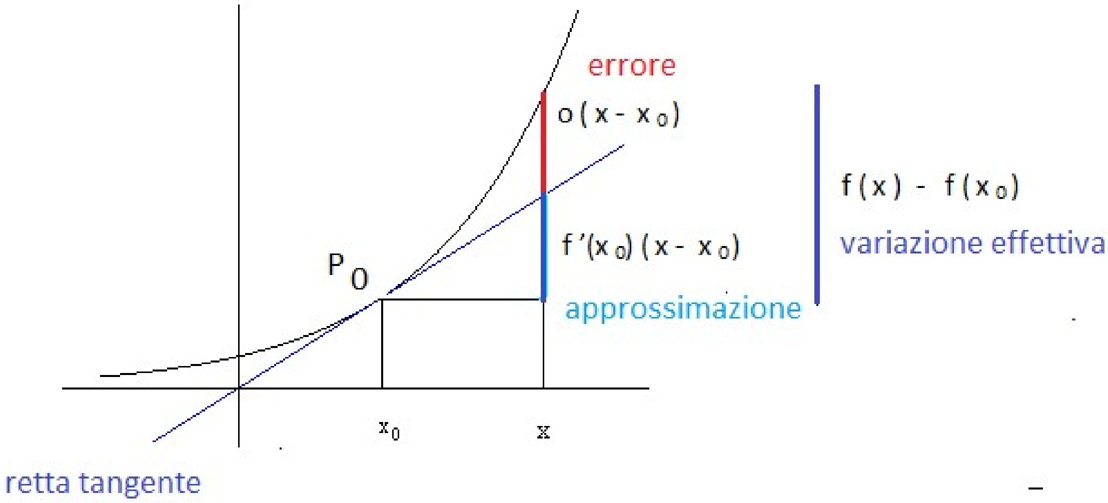
Al termine $f'(x_0)(x - x_0)$ si dà il nome di differenziale nel punto x_0 e si indica con il simbolo df.

Riassumendo:

Nelle funzioni derivabili la variazione $\Delta x = x - x_0$ della variabile produce la variazione $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ della funzione, che (se $f'(x_0)$ è diverso da 0) in prima approssimazione risulta ad essa proporzionale, a meno di un errore trascurabile rispetto a Δx. Al termine $f'(x_0)(x - x_0)$, ovvero $f'(x_0)\Delta x$, si dà il nome di **differenziale** della funzione nel punto x_0 . In altre parole, dunque , il differenziale è **l'approssimazione lineare della variazione Δf** :

$$\Delta f = df + o(\Delta x).$$

Equivalentemente, nell'ipotesi fatta, la funzione $f(x)$ può essere approssimata con un polinomio di grado minore o uguale ad 1 (il cui grafico è la retta tangente nel punto di ascissa x_0), a meno di un errore trascurabile rispetto a $x - x_0$.

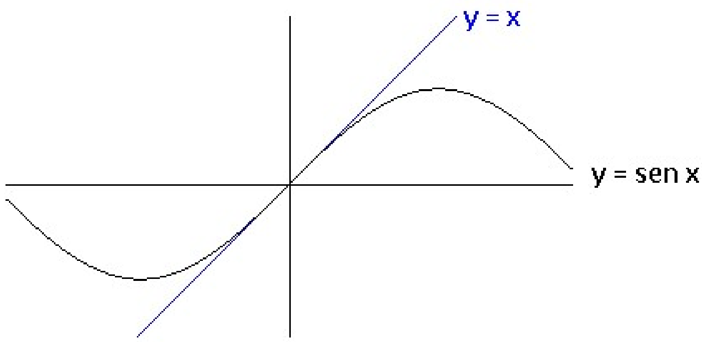


Parleremo a questo proposito di **approssimazione lineare** della funzione f.

Ad esempio, faremo vedere che D sen x = cos x ; dunque per la funzione seno, scelto $x_0 = 0$, l'approssimazione precedente diventa:

$$\operatorname{sen} x = x + o(x)$$

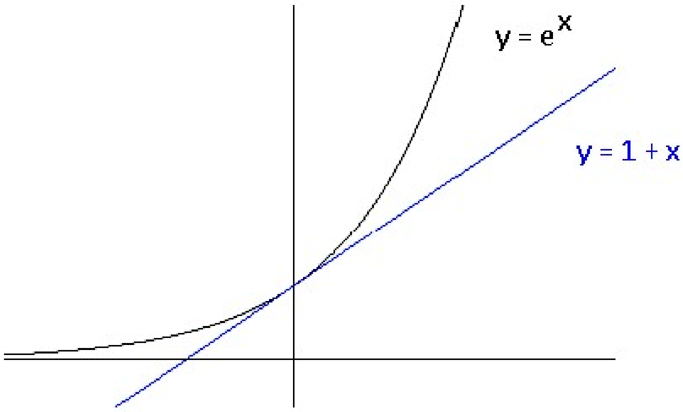
che avevamo già trovato per deduzione da un limite notevole.



Un altro esempio è dato dalla funzione esponenziale e^x, la cui derivata vedremo che coincide con la funzione stessa; scegliendo ancora $x_0 = 0$, si ha allora:

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

ed anche questo è un risultato già noto.

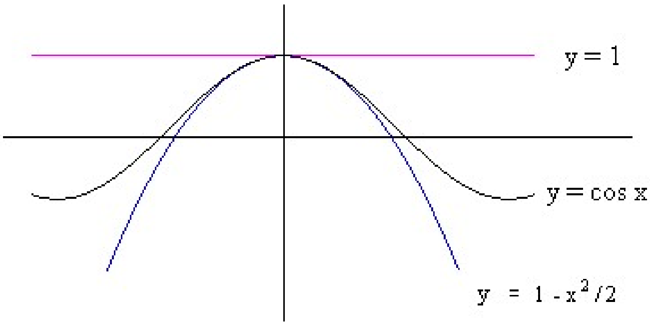


Per la funzione coseno abbiamo trovato un risultato diverso:

$$\cos x = 1 - \tfrac{1}{2} x^2 + o(x^2)$$

cioè un'approssimazione non lineare, con un polinomio di secondo grado. Questo risultato migliora quello che troviamo utilizzando la differenziabilità della funzione: poiché $D \cos x = -\operatorname{sen} x$, si ha infatti:

$$\cos x = 1 + o(x).$$



Ci siamo già serviti delle approssimazioni per lo studio di limiti che si presentano in una forma indeterminata; una diversa applicazione permette di calcolare il valore numerico di una funzione in un punto.

Ad esempio, vedremo che la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ può essere approssimata nell'intorno di un punto $x_0 > 0$ nella forma

$$\sqrt{x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) .$$

Volendo approssimare $\sqrt{60}$, possiamo scegliere $x_0 = 64$, ottenendo:

$$\sqrt{60} \approx 8 + \frac{1}{2 \cdot 8}(-4) = 7{,}75$$ (il valore esatto è 7,7459...).

Per approssimare $\sqrt{2}$, la scelta $x_0 = 1$ porta la valore 1,5. E' preferibile però approssimare $\sqrt{200}$ e poi dividere il risultato per 10. Poiché il quadrato più vicino a 200 è $196 = 14^2$, si ottiene

$$\sqrt{200} \approx 14 + \frac{1}{2 \cdot 14}(4) = 14{,}1428...$$

e dunque

$$\sqrt{2} \approx 1{,}41428...$$ (il valore esatto è 1,41421...).

La formula di Taylor permetterà di approssimare una funzione con un polinomio di grado qualunque (ma legato all'ordine di derivabilità della funzione).