– Tangente alla circonferenza

$$\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ y = m(x-x_0)+y_0 \end{cases}$$

sostituiamo la y della seconda equazione nella prima e al posto di R^2 mettiamo $x_0^2+y_0^2$ (perché (x_0, y_0) è un punto della circonferenza); con qualche calcolo arriviamo a:

$$(1+m^2)x^2 - 2m(mx_0-y_0)x + (m^2x_0^2 - 2mx_0y_0 - x_0^2) = 0.$$

Calcoliamo il Δ e poniamolo uguale a 0; svolgendo i calcoli e dopo opportune semplificazioni, arriviamo a

$$m^2y_0^2 + 2mx_0y_0 + x_0^2 = 0$$

cioè

$$(my_0+x_0)^2 = 0. \qquad (*)$$

Dunque deve essere

$$m = -\frac{x_0}{y_0}$$

e in questo modo ritroviamo che la retta tangente è perpendicolare al raggio passante per il punto dato.

Il calcolo fatto prevede che sia $y_0 \neq 0$.

Se $y_0 = 0$, la condizione (*) richiede che sia anche $x_0 = 0$, il che è impossibile dato che il punto $(0,0)$ non sta sulla circonferenza.

Il procedimento, dunque, fallisce se $y_0 = 0$, cioè se il punto considerato è $(R,0)$ o $(-R,0)$. Il fatto di non trovare nessuna retta tangente dipende dal fatto che in questi punti la retta tangente non ha l'equazione da cui siamo partiti, essendo verticale (quindi di equazione $x=R$ oppure $x=-R$).

– Tangente alla parabola

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = m(x - x_0) + y_0 \end{cases}$$

$$ax^2 + (b-m)x + (c + mx_0 - y_0) = 0$$

Imponiamo che sia $\Delta = 0$:

$$(b-m)^2 - 4a(c + mx_0 - y_0) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$m^2 - 2m(b + 2ax_0) + (b + 2ax_0)^2 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(m - (b + 2ax_0))^2 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$m = b + 2ax_0$$

Posto $f(x) = ax^2 + bx + c$, $b + 2ax_0 = f'(x_0)$.

Ritroviamo così che il coefficiente angolare della tangente trovata con il metodo classico è la derivata della funzione f nel punto x_0, come richiesto dal calcolo differenziale.