Applicazioni del calcolo differenziale allo studio del grafico di una funzione e a problemi di ottimizzazione

I risultati visti nel paragrafo precedente permettono di dedurre dallo studio del segno della derivata di una funzione importanti informazioni sul suo grafico, cioè gli intervalli di crescenza o di decrescenza e l'esistenza di punti di massimo o di minimo locali. Queste informazioni, unite a quelle sul dominio di esistenza, sui limiti notevoli al finito (punti di discontinuità, asintoti verticali) e all'infinito (asintoti orizzontali od obliqui), sui punti di non derivabilità, permettono di tracciare il grafico della funzione in modo qualitativamente corretto. Vedremo più avanti come altre informazioni possano essere dedotte dallo studio del segno della derivata seconda.

<u>Esempio 1</u>

$$f(x) = x^x$$

Ricordiamo che, come tutte le funzioni potenza, anche questa è definita in termini di esponenziale e logaritmo; precisamente:

$$f(x) = \exp(x \log x).$$

CAMPO DI ESISTENZA

Data la presenza del logaritmo, la funzione è definita solo per $x > 0$.

SEGNO

Data la presenza dell'esponenziale, la funzione è sempre > 0.

LIMITI NOTEVOLI

per $x \to 0$ $\quad f(x) \to 1$;
$x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile; possiamo prolungare per continuità la funzione in tale punto, ponendo $f(0) = 1$

per $x \to +\infty$ $\quad f(x) \to +\infty$
$f(x)/x \to +\infty$, dunque non c'è asintoto

DERIVATA

$$f'(x) = x^x (\log x + 1) \quad , \text{ per } x > 0$$

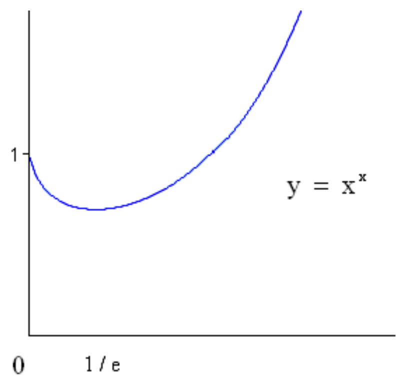
SEGNO DELLA DERIVATA / INTERVALLI DI MONOTONIA

$f'(x) > 0$ se $\log x + 1 > 0$, cioè per $x > 1/e$; dunque:
$f(x)$ è decrescente in $(0, 1/e)$, crescente in $(1/e, +\infty)$
$x = 1/e$ è punto di minimo assoluto , $x = 0$ è punto di massimo locale

COMPORTAMENTO DELLA DERIVATA IN PUNTI PARTICOLARI

Rimane da stabilire il comportamento della derivata per $x = 0$, punto in cui la funzione è definita (come prolungamento continuo), ma non la sua derivata. Poiché per $x \to 0$ risulta $f'(x) \to - \infty$, siamo in presenza di un punto a tangente verticale.

GRAFICO DELLA FUNZIONE



<u>Esempio 2</u>

$$f(x) = x \exp(1/x)$$

CAMPO DI ESISTENZA

La funzione è definita per $x \neq 0$

SEGNO

La funzione ha lo stesso segno di x

LIMITI NOTEVOLI

per $x \to 0^+$

ponendo $t = 1 / x$, ci riduciamo a calcolare il limite per $t \to +\infty$ di $\exp(t) / t$ e questo vale $+\infty$.

La retta x = 0 (asse delle y) è asintoto verticale da destra.

per $x \to 0^-$ $f(x) \to 0$

Il punto x = 0 è una discontinuità eliminabile (solo da sinistra); possiamo prolungare la funzione in x = 0, ponendo f (0) = 0.

per $x \to \pm\infty$ $f(x) \to \pm\infty$

$f(x) / x \to 1$

Per calcolare il limite di $f(x) - x$, si pone $1 / x = t$, ottenendo il limite per $t \to 0$ di $[\exp(t) - 1] / t$, che vale 1

Dunque la retta di equazione $y = x + 1$ è asintoto obliquo per la funzione per $x \to \pm\infty$.

Si può provare (verificare il risultato) che per ogni $t \neq 0$ risulta $\exp(t) \geq 1 + t$.

Dunque per $t > 0$ si ha $[\exp(t) - 1] / t > 1$ e da questo deduciamo che per $x \to +\infty$ il grafico della funzione si avvicina all'asintoto rimanendone al di sopra. Al contrario, per $t < 0$, è $[\exp(t) - 1] / t < 1$ e quindi per $x \to -\infty$ il grafico della funzione si avvicina all'asintoto rimanendone al di sotto.

DERIVATA

$$f'(x) = \exp(1/x)(1 - 1/x) \quad , \text{ per } x \neq 0$$

SEGNO DELLA DERIVATA / INTERVALLI DI MONOTONIA

La derivata è positiva per x < 0 e per x > 1, negativa per 0 < x < 1.

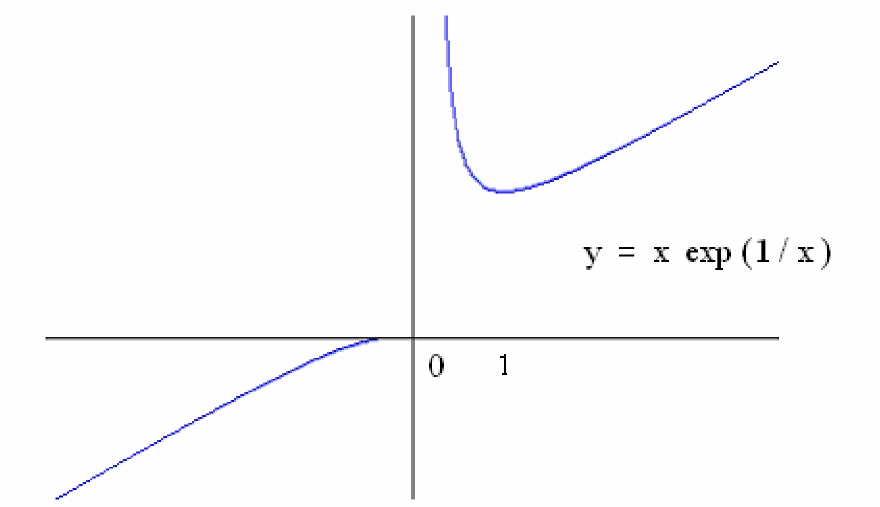
Dunque, la funzione f (x) è crescente in (-∞, 0] e in [1, + ∞), decrescente in (0, 1); x = 1 è punto di minimo locale e vale f (1) = e.
Attenzione: poiché la funzione non è continua in x = 0, non possiamo dedurre che questo è punto di massimo locale, anche se la funzione cresce a sinistra di 0 e decresce alla destra.

COMPORTAMENTO DELLA DERIVATA IN PUNTI PARTICOLARI

Dobbiamo studiare il comportamento della derivata per $x \to 0^-$.

Per calcolare il limite, ponendo t = - 1 / x, ci riconduciamo al limite per $t \to +\infty$ di (1 + t) exp (- t), che vale 0. Dunque in x = 0 (discontinuità eliminabile da sinistra) esiste la derivata (sinistra) e vale 0; la (semi)retta tangente è orizzontale.

GRAFICO



<u>Esempio 3</u>

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = \exp\left\{ x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right\}$$

CAMPO DI ESISTENZA

La funzione è definita per $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

SEGNO

La funzione è sempre positiva

LIMITI NOTEVOLI

per $x \to 0^+$ $\quad x \log(1 + 1/x) = x \log(1 + x) - x \log x \to 0$;
dunque $f(x) \to 1$; $x = 0$ è una discontinuità eliminabile

per $x \to -1^+$ $\quad x \log(1 + 1/x) \to +\infty$;
dunque $f(x) \to +\infty$; la retta $x = -1$ è asintoto verticale

per $x \to \pm\infty$ $\quad f(x) \to e$;
la retta $y = e$ è asintoto orizzontale in entrambi i casi

DERIVATA

$$f'(x) = f(x) \left\{ \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right\}$$

SEGNO DELLA DERIVATA / INTERVALLI DI MONOTONIA

Il segno della derivata è quello del termine in parentesi. A differenza degli esempi precedenti non è possibile studiare per via algebrica questo segno: la risposta può essere ottenuta solo con un metodo grafico. Questo significa che per procedere nello studio della funzione $f(x)$ occorre preliminarmente ottenere informazioni sul segno della funzione entro parentesi: queste informazioni ci permetteranno di risalire al segno di $f'(x)$.

<u>Studio della funzione ausiliaria</u> $\quad g(x) = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$

Campo di esistenza

E' lo stesso della funzione f (x)

Segno

Lo scopo di questi calcoli è appunto quello di ottenere informazioni sul segno

Limiti

$$\text{per } x \to 0^+ \quad g(x) \to +\infty \qquad , \qquad \text{per } x \to \pm\infty \quad g(x) \to 0$$

Osservato che per x < -1 , log ((1 + x) / x) = log (- 1 – x) – log (- x) :

$$\text{per } x \to -1^- \quad g(x) = \frac{(1+x)\ \log(-1-x)\ -\ (1+x)\ \log(-x)\ -\ 1}{1+x} \to +\infty$$

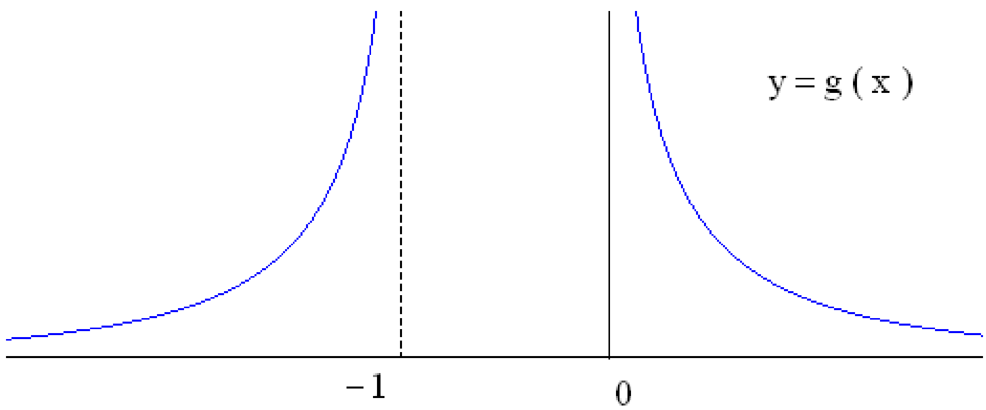
Derivata

$$g'(x) = -\frac{1}{x\,(1+x)^2}$$

Segno della derivata / Intervalli di monotonia

La derivata g '(x) ha il segno opposto a quello di x; quindi la funzione g (x) cresce per x < -1, decresce per x > 0.

Grafico della funzione g (x)



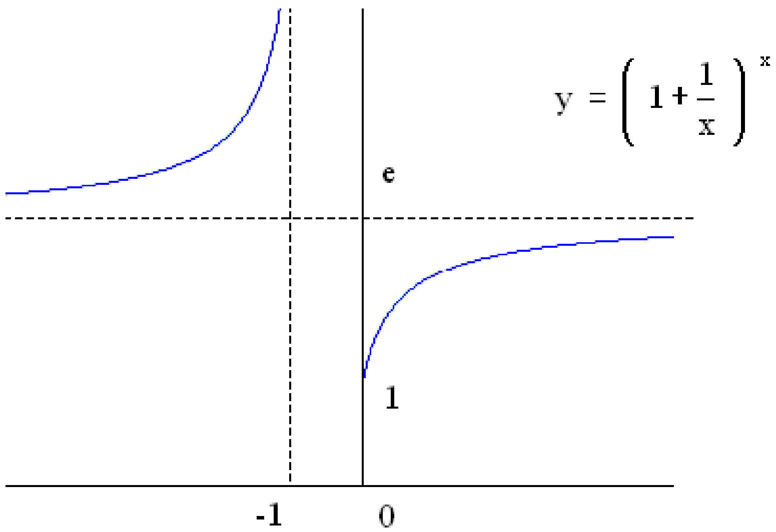
Da questo grafico deduciamo che la funzione g (x) è positiva in tutto il suo campo di esistenza e dunque tale è anche la derivata f ' (x).

Ritornando allo studio della funzione f (x), abbiamo dedotto che è crescente sia per $x < -1$ che per $x > 0$

COMPORTAMENTO DELLA DERIVATA IN PUNTI PARTICOLARI

Rimane da calcolare il limite di f ' (x) per $x \to 0^+$. Questo limite vale $+\infty$ e dunque il punto x = 0 è a tangente verticale.

GRAFICO



Esempio 4

$$f(x) = (1 + x)^{1/x} = \exp\left\{ \frac{1}{x} \log(1+x) \right\}$$

CAMPO DI ESISTENZA

La funzione è definita per $x \in (-1, +\infty)$

SEGNO

La funzione è sempre positiva

LIMITI NOTEVOLI

per $x \to 0$ $\quad f(x) \to e$
x = 0 è una discontinuità eliminabile

per $x \to -1^+$ $\quad f(x) \to +\infty$
la retta x = - 1 è asintoto verticale

per $x \to +\infty$ $\quad f(x) \to 1$
la retta y = 1 è asintoto orizzontale

DERIVATA

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x^2}\left\{ \frac{x}{1+x} - \log(1+x) \right\}$$

SEGNO DELLA DERIVATA / INTERVALLI DI MONOTONIA

Il segno della derivata è quello del termine in parentesi. Anche in questo caso non è possibile studiarlo per via algebrica e dobbiamo procedere con un metodo grafico.

<u>Studio della funzione ausiliaria</u> $g(x) = \frac{x}{x+1} - \log(1+x)$

Campo di esistenza

E' lo stesso della funzione f (x), cioè (- 1, + ∞)

Segno

Lo scopo di questi calcoli è appunto quello di ottenere informazioni sul segno

Limiti

$$\text{per } x \to +\infty \quad g(x) \to -\infty$$

$$\text{per } x \to -1^{+} \quad g(x) = \frac{x-(1+x)\log(1+x)}{1+x} \to -\infty$$

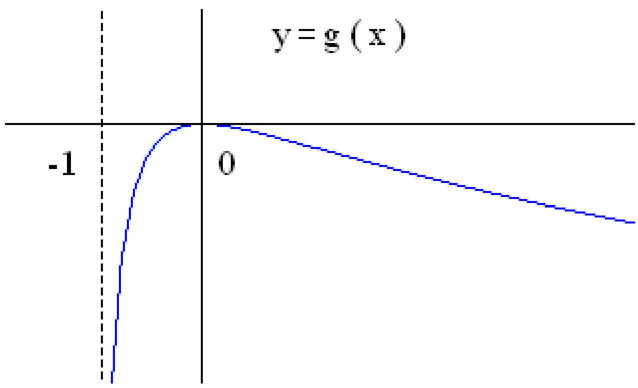
Derivata

$$g'(x) = -\frac{x}{(1+x)^2}$$

Segno della derivata / Intervalli di monotonia

La derivata g ’ (x) ha il segno opposto a quello di x; quindi la funzione g (x) cresce per – 1 < x < 0, decresce per x > 0.

Grafico della funzione g (x)



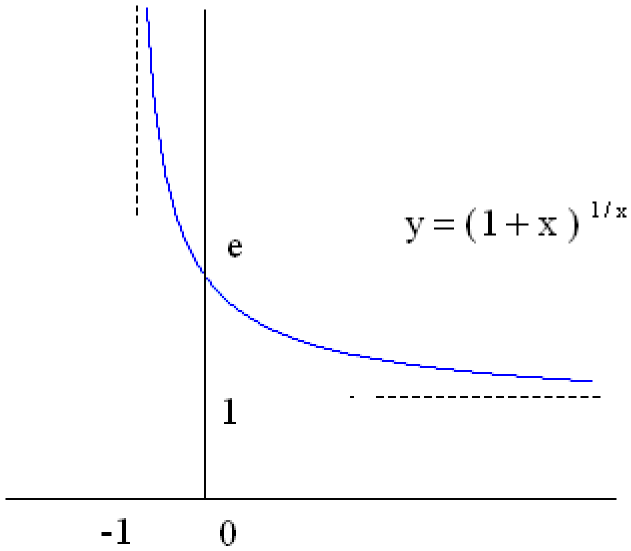
Da questo grafico deduciamo che la funzione g (x) è negativa in tutto il suo campo di esistenza e dunque tale è anche la derivata f ’ (x).

<u>Ritornando alla funzione f (x)</u>, il risultato precedente permette di concludere che è decrescente in tutto il suo dominio

COMPORTAMENTO DELLA DERIVATA IN PUNTI PARTICOLARI

Rimane da calcolare il limite di f ’ (x) per x → 0; questo limite vale ½ e dunque la funzione è derivabile anche in questo punto. Per la verifica di questo risultato i metodi di calcolo sin qui studiati non sono sufficienti; riprendere l'esercizio dopo aver studiato il teorema dell'Hopital (o la formula di Taylor).

GRAFICO



Esempio 5

$$f(x) = \frac{|\log x|}{x}$$

CAMPO DI ESISTENZA

E' definita per $x > 0$

SEGNO

E' positiva in tutto il suo campo di esistenza, nulla per $x = 1$

LIMITI NOTEVOLI

per $x \to 0$ $f(x) \to +\infty$; l'asse y è asintoto verticale per $x \to +\infty$ $f(x) \to 0$;   l'asse x è asintoto orizzontale

DERIVATA

$$f'(x) = \operatorname{sgn}(\log x)\,\frac{1-\log x}{x^2}\ ,\quad \text{per } x > 0\ ,\ x \neq 1$$

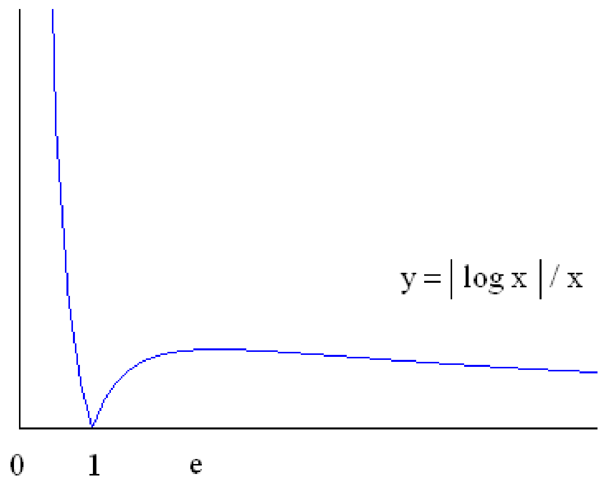
SEGNO DELLA DERIVATA / INTERVALLI DI MONOTONIA

sgn (log x) è positivo per x > 1, mentre 1 - log x lo è per x < e; la derivata è dunque positiva per 1 < x < e, negativa per 0 < x < 1 e per x > e.
Dunque, la funzione f (x) decresce in (0, 1), cresce in (1, e), torna infine a decrescere in (e, +∞); x = 1 è punto di minimo (assoluto), x = e è punto di massimo (locale).

COMPORTAMENTO DELLA DERIVATA IN PUNTI PARTICOLARI

Dobbiamo studiare il comportamento della derivata per $x \to 1$; è facile controllare che il limite da destra vale 1, quello da sinistra -1; dunque la funzione non è derivabile per x = 1, che è un punto angoloso.

GRAFICO



Osservazione

Per ottenere il grafico della funzione f (x) , avremmo potuto studiare la funzione g (x) = log x / x; questa coincide con f (x) dove è log x > 0, cioè per x > 1, ne è l'opposta per 0 < x < 1. Questo significa che per x > 1 il grafico di g (x) coincide con quello di f (x), mentre per 0 < x < 1 ne è il simmetrico rispetto all'asse delle x.

Esempio 6

$$f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|} - x$$

CAMPO DI ESISTENZA

E' definita per ogni x reale

SEGNO

E' positiva per $x < 1/\sqrt{2}$, negativa per $x > 1/\sqrt{2}$ e nulla per $x = 1/\sqrt{2}$.
(il lettore verifichi questi risultati)

LIMITI NOTEVOLI

per $x \to -\infty$ $\quad f(x) \to 0^-$

Infatti:

$$\sqrt{x^2 - 1} - x = -\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} \to 0^-.$$

L'asse x è asintoto orizzontale; il grafico si avvicina all'asintoto rimanendone al di sotto

per $x \to -\infty$ $\quad f(x) \to +\infty$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2(1 - 1/x^2)} - x}{x} = -\sqrt{1 - 1/x^2} - 1 \to -2$$

(ricordiamo che per $x < 0$ vale $\sqrt{x^2} = -x$).

$$f(x)+2x = \sqrt{x^2-1} + x = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1} - x} \to 0^-$$

La retta di equazione y = - 2 x è asintoto obliquo; la funzione si avvicina ad esso rimanendone al di sotto

DERIVATA

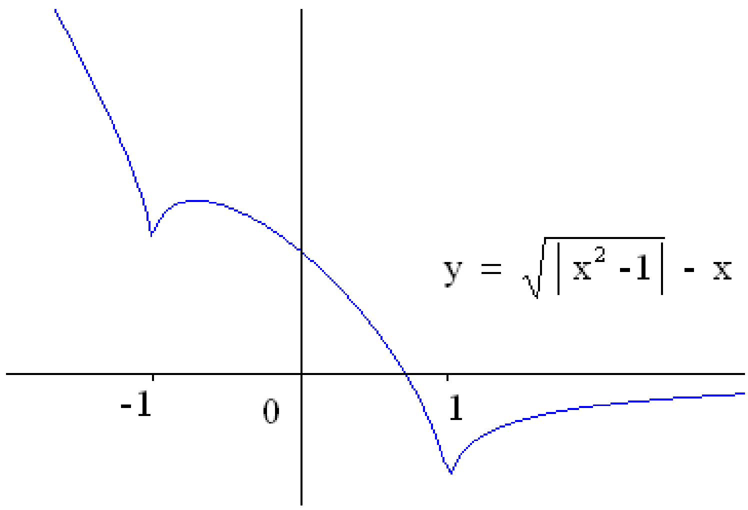
$$f'(x) = \frac{x \operatorname{sgn}(x^2-1)}{\sqrt{|x^2-1|}} - 1 , \quad \text{per } x \neq \pm 1$$

SEGNO DELLA DERIVATA / INTERVALLI DI MONOTONIA

$$f'(x) \geq 0 \iff x \operatorname{sgn}(x^2-1) \geq \sqrt{|x^2-1|}$$

Verificare che questo accade per $-1 < x \leq -1/\sqrt{2}$ e per $x > 1$.

GRAFICO



COMPORTAMENTO DELLA DERIVATA IN PUNTI PARTICOLARI

$$\text{per } x \to 1^{\pm} \quad f'(x) \to \pm\infty$$
$$\text{per } x \to -1^{\pm} \quad f'(x) \to \pm\infty$$

I due punti esaminati sono cuspidi.

<u>Esempio 7</u>

$$f(x) = \arccos \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$

CAMPO DI ESISTENZA

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 2 > 0 \\ -1 \leq 1/\sqrt{x^2 - 2x + 2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 2 > 0 \\ x^2 - 2x + 2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$$

Dunque, la funzione è definita in **R**

SEGNO

Poiché la funzione arcocoseno assume valori compresi tra 0 e π, lo stesso accade per la f (x); anzi, dato che in f (x) l'argomento dell'arcocoseno è positivo, la funzione f (x) assume valori tra 0 e $\pi / 2$.
Osserviamo anche che $f(1) = 0$, $f(0) = \pi / 4$.

LIMITI NOTEVOLI

per $x \to \pm\infty \qquad f(x) \to \pi / 2$

La retta $y = \pi / 2$ è asintoto orizzontale

DERIVATA

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x-1)}{x^2-2x+2} \quad , \quad x \neq 1$$

SEGNO DELLA DERIVATA / INTERVALLI DI MONOTONIA

$f'(x) > 0$ per $x > 1$.

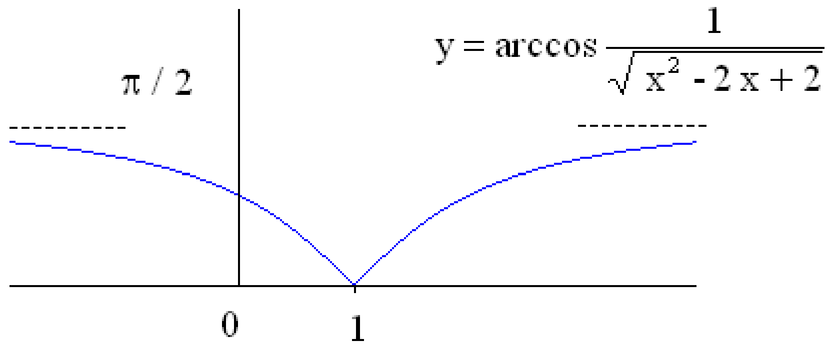
$x = 1$ punto di minimo assoluto

COMPORTAMENTO DELLA DERIVATA IN PUNTI PARTICOLARI

per $x \to 1^{\pm}$ $\quad f'(x) \to \pm 1$

$x = 1$ è un punto angoloso.

GRAFICO



Esempio 8

$$f(x) = \frac{2\cos x}{2 - \operatorname{sen} x}$$

CAMPO DI ESISTENZA

La funzione è definita in **R**; poiché è periodica di periodo 2π, possiamo limitare lo studio all'intervallo $[0, 2\pi]$.

SEGNO

E' lo stesso di cos x: $f(x) > 0$ per $0 < x < \pi/2$ e $3\pi/2 < x < 2\pi$, $f(x) < 0$ per $\pi/2 < x < 3\pi/2$; la funzione si annulla per $x = \pi/2$ e per $x = 3\pi/2$.

LIMITI NOTEVOLI

nessun limite da calcolare

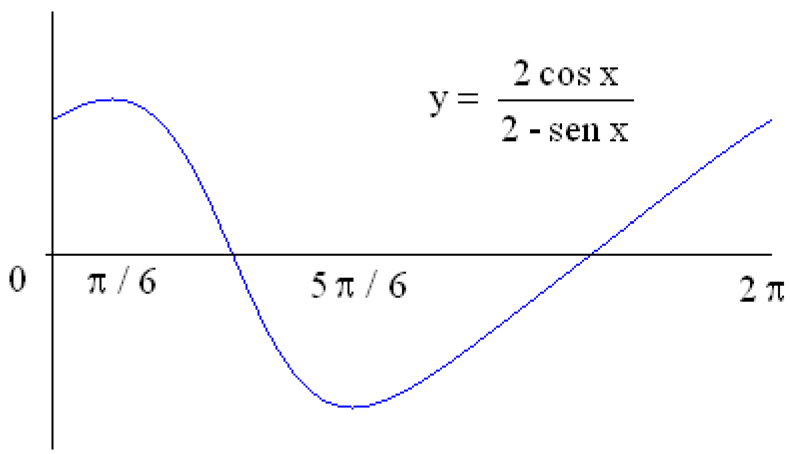
DERIVATA

$$f'(x) = 2\,\frac{1 - 2\,\mathrm{sen}x}{(2 - \mathrm{sen}x)^2}$$

SEGNO DELLA DERIVATA / INTERVALLI DI MONOTONIA

$f'(x) > 0$ se sen $x < ½$, ossia per $0 < x < \pi/6$ e per $5\pi/6 < x < 2\pi$;
$x = \pi/6$ è punto di massimo assoluto, $x = 5\pi/6$ di minimo assoluto.

GRAFICO



Esempio 9

$$f(x) = (\mathrm{tg}\, x)^{1/\cos x}$$

CAMPO DI ESISTENZA

Riscriviamo la funzione nella forma exp (log tg x / cos x).
La funzione è 2π – periodica : possiamo limitarci a studiarla per $x \in [0, 2\pi]$.
Rispetto a questo intervallo la funzione è definita in $(0, \pi/2) \cup (\pi, 3\pi/2)$

SEGNO

Sempre positiva

LIMITI NOTEVOLI

per $x \to 0^+$ $f(x) \to 0$ discontinuità eliminabile

per $x \to \pi/2^-$ $f(x) \to +\infty$

per $x \to \pi^+$ $f(x) \to +\infty$

per $x \to 3\pi/2^-$ $f(x) \to 0$ discontinuità eliminabile

DERIVATA

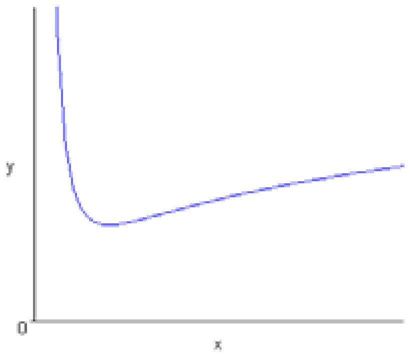
$$f'(x) = f(x)\left(\frac{\frac{1}{\mathrm{sen}\, x} + (\log \mathrm{tg} x)\,\mathrm{sen} x}{\cos^2 x}\right) =$$

$$= f(x)\,\frac{\mathrm{sen} x}{\cos^2 x}\left(\frac{1}{\mathrm{sen}^2 x} + \log \mathrm{tg} x\right) =$$

$$= f(x)\,\frac{\operatorname{sen}x}{\cos^2 x}\left(1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}+\log \operatorname{tg}x\right).$$

SEGNO DELLA DERIVATA / INTERVALLI DI MONOTONIA

Occorre studiare il segno della funzione $\varphi(t) = 1+\frac{1}{t^2}+\log t$ per $t > 0$.



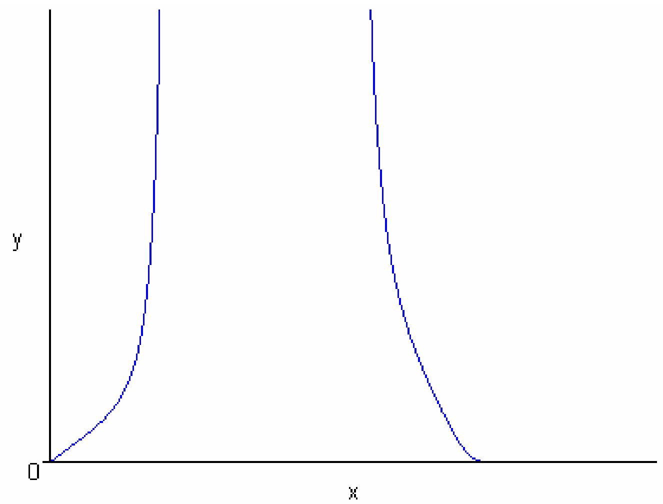
Per $t \to 0$ e per $t \to +\infty$ $\phi(t) \to +\infty$

$$\varphi'(t) = \frac{1}{t}-\frac{2}{t^3}=\frac{t^2-2}{t^3}$$

$$\varphi(\sqrt{2}) > 0$$

In definitiva , dunque , il segno di f ’ è quello di sen x

GRAFICO



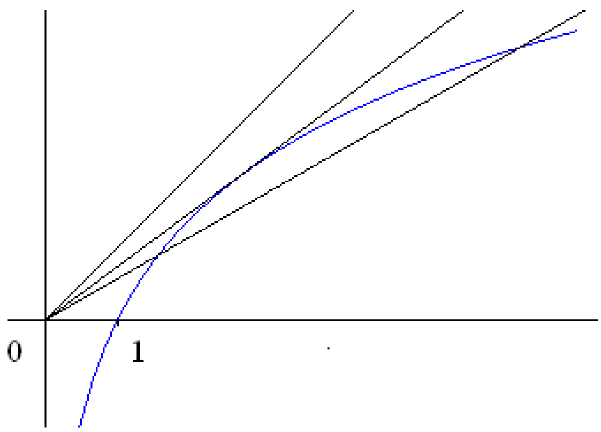
Esempio 10

Dire per quali valori del parametro a l'equazione $\mathbf{x = \log_a x}$ ammette soluzioni e il loro numero.

Innanzitutto osserviamo che, in quanto base di un logaritmo, il parametro a può assumere soltanto valori strettamente positivi e diversi da 1.
L'equazione non può essere studiata per via algebrica; ne daremo due diverse risoluzioni grafiche.

I metodo

Riscriviamo l'equazione nella forma equivalente $x \log a = \log x$ (con $a > 0$, $a \neq 1$).
Il problema diventa quello di vedere se la retta di equazione $y = x \log a$ e la curva di equazione $y = \log x$ si intersecano.



Se $\log a < 0$ la retta interseca la curva in un punto.
Se $\log a > 0$ l'intersezione può non esistere, essere unica o essere doppia a seconda del valore del parametro.

La soluzione unica si ottiene quando la retta è tangente alla curva: per stabilire il corrispondente valore di a, osserviamo che nel punto di tangenza le due funzioni considerate devono avere la stessa derivata

$$\log a = 1 / x \quad \text{cioè} \quad x = 1 / \log a$$

e lo stesso valore

$1 = \log (1 / \log a)$ cioè $\log a = 1 / e$.

In conclusione, l'equazione data ha :

1 soluzione	per $\log a < 0$
2 soluzioni	per $0 < \log a < 1 / e$
1 soluzione	per $\log a = 1 / e$
nessuna soluzione	per $\log a > 1 / e$.

II metodo

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \log x - x \log a, \quad x > 0$$

e studiamone gli zeri.

Se $0 < a < 1$:

per $x \to 0$ $\quad f(x) \to -\infty$ $\qquad$ per $x \to +\infty$ $\quad f(x) \to +\infty$

$f'(x) = 1 / x - \log a > 0$ in tutto il dominio

La funzione ha un solo zero: $x = \xi$ (vedere figura 1).

Se $a > 1$:

per $x \to 0$ $\quad f(x) \to -\infty$ $\qquad$ per $x \to +\infty$ $\quad f(x) \to -\infty$

$f'(x) = 1 / x - \log a > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 1 / \log a$

Il punto $x = 1 / \log a$ è di massimo assoluto: il numero degli zeri della funzione (e dunque quello delle soluzioni dell'equazione proposta) dipende dal segno di $f(1 / \log a) = -\log \log a - 1$ (vedere figura 2); completare lo svolgimento.

fig.1

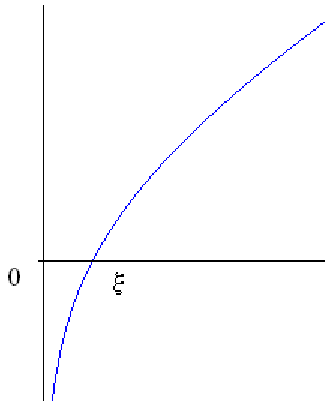
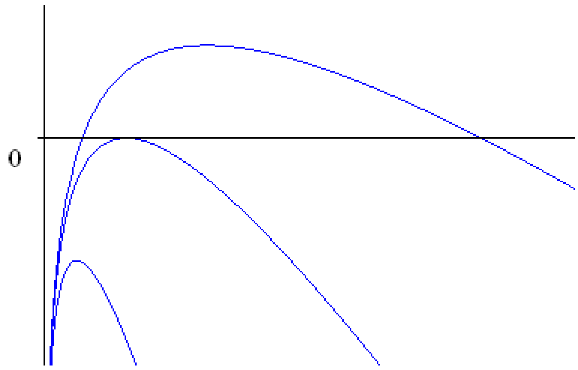


fig. 2



<u>Esempio 11</u>

Studiare la disequazione **sen x ≥ x - x ^{3} / 6** .

Il problema equivale a studiare il segno della funzione $f(x) = \text{sen}\, x - x + x^3/6$.

Per essa si ha:

per $x \to \pm\infty$ $f(x) \to \pm\infty$:

$f'(x) = \cos x - 1 + x^2/2$.

Per procedere, occorre conoscere il segno di f ’.

Prendiamo dunque in esame la funzione

$g(x) = \cos x - 1 + x^2/2$.

Poiché

$g'(x) = -\text{sen}\, x + x \geq 0$ per $x \geq 0$,

min $g' = g'(0) = 0$, ovvero $g'(x) > 0$ per $x \neq 0$. Ma allora è anche $f'(x) > 0$ per $x \neq 0$, cioè f è crescente. Dato che $f(0) = 0$, risulta $f(x) \geq 0$ per $x \geq 0$ (cioè la disequazione di partenza è risolta per $x \geq 0$).

Esempio 12

Trovare le dimensioni (raggio di base e altezza) del cilindro di volume V dato che abbia superficie totale minima.

Indicando con R il raggio di base e con H l'altezza, la superficie totale del cilindro vale:

$$A = 2\pi R^2 + 2\pi R H.$$

Poiché il volume $\pi R^2 H$ è assegnato e vale V, possiamo ricavare H in funzione di R :

$$A(R) = 2\pi R^2 + 2V/R.$$

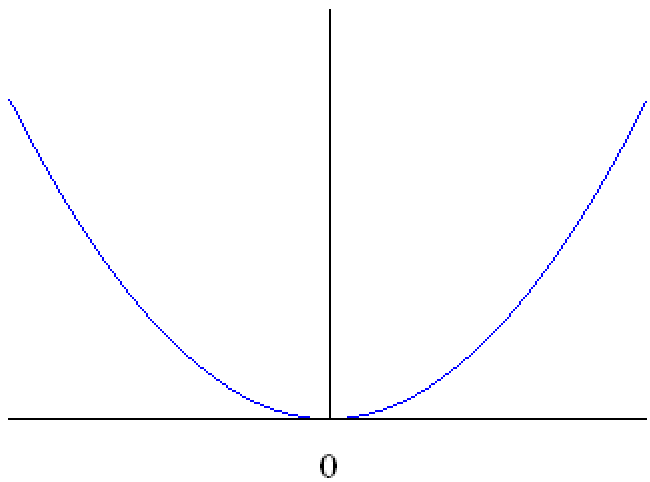
Essendo

$$A'(R) = 4\pi R - 2V/R^2$$

l'area minima si ottiene per $R = \sqrt[3]{V/2\pi}$, a cui corrisponde $H = \sqrt[3]{4V/\pi}$.
In particolare, dunque, il cilindro cercato ha l'altezza uguale al diametro di base.

Esempio 13

Trovare la minima distanza tra i punti della parabola di equazione $x^2 = 4y$ e il punto (0, b) sull'asse delle y, al variare del parametro reale b.



La quantità da rendere minima è la distanza

$$d = \sqrt{x^2 + (y-b)^2} \,.$$

Poiché il punto (x, y) appartiene alla parabola, possiamo sostituire x^2 con 4 y, ottenendo in tal modo la funzione:

$$d(y) = \sqrt{4y + (y-b)^2} \quad , \quad y \geq 0 \,.$$

La derivata della funzione vale

$$2(y+2-b) \,/\, \sqrt{4y + (y-b)^2}$$

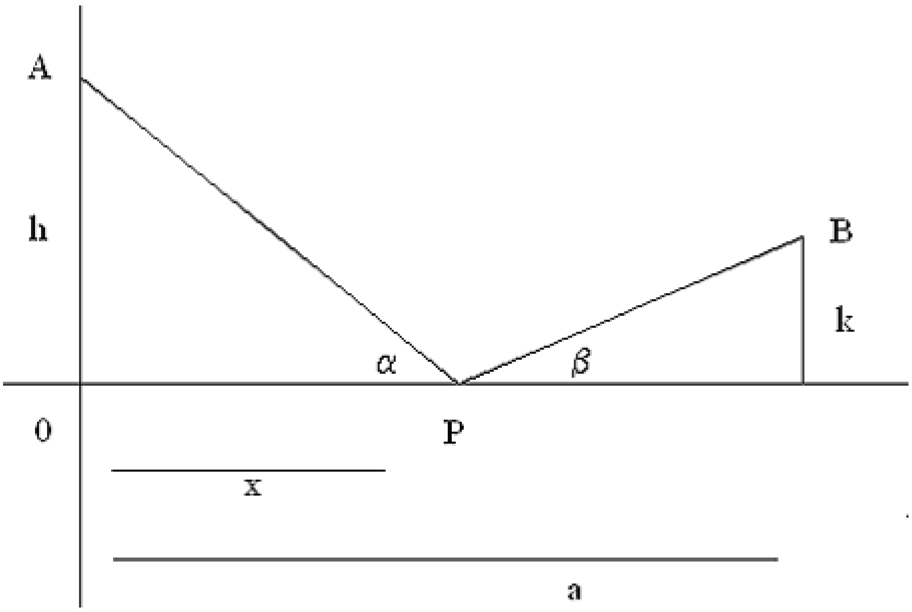
ed è positiva per $y \geq b - 2$.

Per $b - 2 \leq 0$, la derivata risulta sempre positiva nella semiretta $[0, +\infty)$ in cui studiamo la funzione; dunque questa è crescente e assume il suo valore minimo per y = 0. Troviamo così che l'origine è il punto della parabola di minima distanza e che questa vale $|b|$.
Invece per $b - 2 > 0$, la funzione decresce tra 0 e b - 2, cresce da b - 2 in poi ; il valore minimo è assunto dunque per y = b – 2. Troviamo in tal modo sulla parabola due punti di minima distanza: $(\pm 2\sqrt{b-2} \,,\, b-2)$; la distanza minima è $2\sqrt{b-1}$.

Esempio 14

> Trovare su una data retta un punto tale che sia minima la somma delle sue distanze da due punti non appartenenti alla retta.

Data una retta r e due punti distinti A e B non appartenenti ad r, dobbiamo trovare sulla retta un punto P che renda minima la somma delle lunghezze dei segmenti AP e PB.
Possiamo supporre che A e B stiano dalla stessa parte rispetto alla retta (cioè nello stesso semipiano); in caso contrario, P è ovviamente l'intersezione della retta con il segmento AB.
Assumiamo il riferimento cartesiano che ha come asse delle x la retta r e come asse delle y la retta perpendicolare ad r e passante per uno dei punti (vedere figura).



La funzione da rendere minima è definita da:

$$d(x) = \sqrt{x^2 + h^2} + \sqrt{(x-a)^2 + k^2} \;;$$

derivando, si trova:

$$d'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} + \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + k^2}}$$

$$d''(x) = \frac{h^2}{(x^2 + h^2)^{3/2}} + \frac{k^2}{[(x-a)^2 + k^2]^{3/2}}$$

La ricerca dei punti stazionari $x = c$ porta all'equazione

$$\frac{c}{\sqrt{c^2 + h^2}} = \frac{a-c}{\sqrt{(c-a)^2 + k^2}}$$

cioè

$$\cos\alpha = \cos\beta.$$

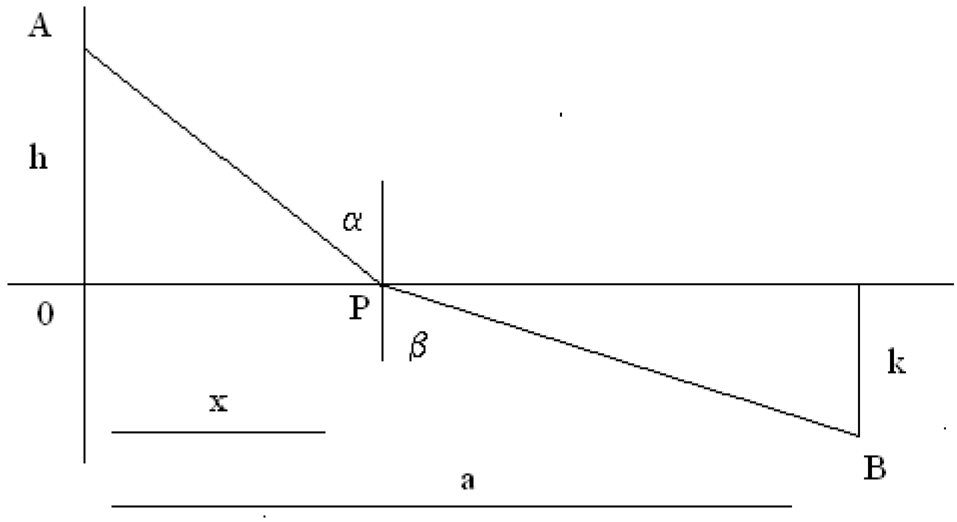
Dunque, i segmenti PA e PB devono formare angoli uguali con la retta data.
Poiché d'' (x) è sempre positiva, d'(x) risulta crescente; essendo d' (c) = 0, la derivata risulta negativa per $x < c$, positiva per $x > c$. Questo garantisce che il punto stazionario trovato è di minimo assoluto.

La soluzione di questo problema è strettamente collegata alla legge della riflessione in ottica. Un importante principio fisico dovuto a Fermat stabilisce che il cammino seguito da un raggio luminoso per spostarsi, sotto opportune condizioni, da un punto A ad un punto B è quello che corrisponde al tempo minimo di percorrenza.
Se la condizione assegnata impone che il raggio nel suo cammino incontri una data retta (uno specchio), il tempo minimo di percorrenza è ottenuto quando il raggio incidente e quello riflesso formano lo stesso angolo con la retta.

Esempio 15

> Dati due punti A e B situati da parti opposte rispetto ad una retta r, vogliamo trovare il percorso da A a B di durata minima, sapendo che la velocità da una parte è v_1, dall'altra v_2.

Questo cammino è composto da due segmenti che si incontrano in un punto P della retta. Usando il riferimento cartesiano e le notazioni della figura sottostante:



risulta:

$$PA = \sqrt{x^2 + h^2} \quad , \quad PB = \sqrt{(a-x)^2 + k^2} \,.$$

Il tempo per percorrere ciascuno dei due segmenti è rispettivamente:

$$PA / v_1 \quad , \quad PB / v_2 \,.$$

La funzione da rendere minima è dunque definita da:

$$d(x) = \frac{\sqrt{x^2+h^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(a-x)^2+k^2}}{v_2} \; ;$$

derivando, si trova:

$$d'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{x^2+h^2}} - \frac{a-x}{v_2\sqrt{(a-x)^2+k^2}}$$

$$d''(x) = \frac{h^2}{v_1\,(x^2+h^2)^{3/2}} + \frac{k^2}{v_2\,[(a-x)^2+k^2]^{3/2}}$$

La ricerca dei punti stazionari $x = c$ porta all'equazione

$$\frac{c}{v_1\sqrt{c^2+h^2}} = \frac{a-c}{v_2\sqrt{(a-c)^2+k^2}}$$

cioè

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Poiché d'' (x) è sempre positiva, come nell'esempio precedente possiamo concludere che il punto stazionario trovato rende minima la funzione.

Il significato fisico di questo esempio è dato dal già citato principio di Fermat in ottica, applicato stavolta alla rifrazione di un raggio luminoso nel passaggio da un mezzo ad un altro: il cammino di tempo minimo seguito dal raggio luminoso richiede che il rapporto tra il seno dell'angolo i di incidenza e quello dell'angolo r di rifrazione sia uguale al rapporto I tra le velocità di propagazione (detto indice di rifrazione).
Per esempio, se il primo mezzo è l'aria e il secondo è l'acqua, poiché la velocità della luce nell'acqua è minore che nell'aria, si avrà:

$$I = \frac{v_1}{v_2} > 1 \; ;$$

dunque

$$\mathrm{sen}\, r = \frac{\mathrm{sen}\, i}{I} < \mathrm{sen}\, i,$$

cioè l'angolo di rifrazione è minore di quello di incidenza.
Inoltre

$$\mathrm{sen}\, r = \frac{\mathrm{sen}\, i}{I} < \frac{1}{I}$$

e dunque r non può superare un certo angolo critico, il che giustifica il fenomeno della riflessione totale.