Polinomi di Taylor
di punto iniziale x_0 e grado n assegnati

1. $f(x) = \frac{1}{x-2}$ $\quad (x_0 = 0, n = 3)$

$$\frac{1}{x-2} = \frac{1}{-2(1-\frac{x}{2})} =$$

Utilizziamo $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + o(t^3)$
con $t = \frac{x}{2}$

$$= -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8}\right) + o(x^3)$$

2. $f(x) = \frac{1}{x^2-x-2}$ $\quad (x_0 = 0, n = 3)$

$$\frac{1}{x^2-x-2} = \frac{1}{-2\left(1-\frac{x^2-x}{2}\right)}$$

come sopra, con $t = \frac{x^2-x}{2}$

$$= -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{x^2-x}{2} + \frac{x^2-2x^3}{4} + \frac{-x^3}{8}\right) + o(x^3)$$

(ordinare i termini)

$$= \dots$$

3. $f(x) = (1+x)^{1/x}$ $\quad (x_0 = 0, n = 3)$

$x_0 = 0$ è una discontinuità eliminabile; però non sappiamo se nel punto la funzione è derivabile, né quante volte lo è.

$$(1+x)^{1/x} = e^{\frac{\lg(1+x)}{x}}$$

$$\lg(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$$

$$\frac{\lg(1+x)}{x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + o(x^3)$$

$$f(x) = e \cdot e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)}$$

Utilizziamo Taylor per e^x, sostituendo l'esponente con $-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}$

$$= e\left(1+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{3}\right)+\frac{1}{6}\left(-\frac{x^3}{8}\right)\right)+o(x^3)$$

$$= e\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2-\frac{5}{8}x^3\right)+o(x^3)$$

Da questo risultato deduciamo:

$f(0)=e$ come prolungamento per continuità (e questo era già noto)

$f'(0)=-e/2$, cioè la funzione prolungata per continuità risulta derivabile nel punto e abbiamo trovato il valore della derivata.

Analogamente:

$f''(0)=11e/12 \qquad f'''(0)=-15e/4.$

---

4. Data la fz. $f(x)=\frac{x+1}{x-1}\sqrt{x^2-4}$, usare la formula di T per trovarne l'asintoto per $x\to+\infty$, stabilendo la posizione del grafico rispetto ad esso.

Poniamo $t=1/x\to0^+$, ottenendo $\frac{1+t}{1-t}\,\frac{\sqrt{1-4t^2}}{t}$.

$$F(t)=\frac{1}{t}(1+t)(1+t+t^2+t^3+o(t^3))(1-2t^2+o(t^3))$$

$$=\frac{1}{t}(1+2t+2t^2+2t^3+o(t^3))(1-2t^2+o(t^3))$$

$$=\frac{1}{t}(1+2t-2t^3+o(t^3))$$

$$=\frac{1}{t}+2-2t^2+o(t^2)$$

$$f(x)=x+2-\frac{2}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$y=x+2$ asintoto obliquo

$y-x-2\sim-\frac{2}{x^2}$ localmente negativo.

Il grafico si avvicina all'asintoto da sotto.

5. $f(x) = \operatorname{tg} x \qquad \left(x_0 = \frac{\pi}{4},\ n = 3\right)$

$$x - x_0 = t \to 0$$

$$\operatorname{tg}\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} t + 1}{1 - \operatorname{tg} t} = \frac{1 + t + t^3/3 + o(t^3)}{1 - t - t^3/3 + o(t^3)} =$$

$$= \left(1 + t + t^3/3 + o(t^3)\right) \cdot \left(1 + (t + t^3/3) + (t + t^3/3)^2 + (t + t^3/3)^3 + o^3\right)$$

$$= \left(1 + t + t^3/3 + o(t^3)\right)\left(1 + t + t^3/3 + t^2 + t^3 + o(t^3)\right)$$

$$= 1 + 2t + 2t^2 + \frac{8}{3}t^3 + o(t^3)$$

$$\operatorname{tg} x = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3$$

In alternativa, si può usare la definizione, calcolando le derivate successive della fz. $\operatorname{tg} x$.

Calcolo di limiti con Taylor

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x^2}{(\cos^2 x - \cos x^2)\, x^2} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

$$\operatorname{sen} x^2 = x^2 + o(x^4)$$

$$\cos^2 x = \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)^2 = 1 + \frac{x^4}{4} - x^2 + \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

$$= 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

$$\cos x^2 = 1 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$$

$$f(x) = \frac{-\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{-x^4 + o(x^4)} \longrightarrow \frac{1}{3}$$

2. $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\lg(1+x)}\right)^{1/x} \qquad (1^\infty)$$

$$\lg f(x) = \frac{1}{x} \lg\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\lg(1+x)}\right) \sim \frac{1}{x}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\lg(1+x)} - 1\right)$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x - \lg(1+x)}{x \lg(1+x)} = \frac{\cancel{x} - \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$f(x) \rightarrow \sqrt{e}$$

3. $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos^2 x}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right) \qquad (\infty - \infty)$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x - x^2}{x^2 \operatorname{sen}^2 x} = \frac{(\operatorname{sen} x \cos x - x)(\operatorname{sen} x \cos x + x)}{x^2 \operatorname{sen}^2 x}$$

$$\sim \frac{2x\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x - x\right)}{x^4} \sim \frac{2x\left(x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3) - x\right)}{x^4}$$

$$\sim \quad \frac{-\frac{4}{3}x^4}{x^4} \to -\frac{4}{3}$$

4. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x} - \cos\sqrt{x}}{\lg(\lg(e+x^2))} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^2 + o(x^2)$$

$$\lg(e+x^2) \to 1 \qquad \lg(\lg(e+x^2)) \sim \lg(e+x^2) - 1 =$$

$$= \lg(1 + x^2/e) = \frac{x^2}{e} \cancel{- \frac{1}{2}\frac{x^4}{e^2}} + o(x^2)$$

$$f(x) \sim \frac{-\frac{1}{6}x^2}{\frac{1}{e}x^2} \to -\frac{e}{6}$$

5. $$\lim_{x\to 0} \frac{\lg(1-x^2) - 2 + 2\sqrt{1+x^2}}{e^{x^2} - 3 + 2\cos x}$$

$$\lg(1-x^2) = -x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$$

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$$

Numeratore $\sim -3x^4/4$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

Denominatore $\sim \frac{7}{12}x^4$

Limite $-9/7$.