Integrale indefinito

Lo schema

derivata

$$f(x) \underset{D^{-1}}{\overset{D}{\rightleftarrows}} f'(x)$$

integrale

interpreta l'integrale come l'operazione inversa della derivata.

Ad esempio :

D : senx → cosx

D^{-1} : cosx → senx   Infatti D^{-1} cosx cerca la funzione la cui derivata è cosx e senx ha questa proprietà

Questo schema però non è corretto, perché l'applicazione D non è iniettiva e dunque non è invertibile. Infatti, ad esempio, tutte le funzioni della forma senx + c (c costante) hanno la stessa derivata.

Alla notazione D^{-1} dunque non possiamo dare il significato di applicazione inversa; possiamo però interpretarla come **immagine inversa** (che ha senso anche quando l'applicazione inversa non esiste).

Come immagine inversa, $D^{-1} f'(x)$ indica l'insieme di tutte le funzioni la cui derivata è f' ; f è una di queste funzioni , tutte le altre le troviamo aggiungendo una costante arbitraria (se siamo in un intervallo) ; dunque $D^{-1} f' = \{ f(x) + c \}$.

Ad esempio , $D^{-1}(\cos x) = \{ \operatorname{sen} x + c \}$.

derivata

$$f(x)+c \underset{D^{-1}}{\overset{D}{\rightleftarrows}} f'(x)$$

integrale

Definizione formale del concetto di integrale indefinito

Data una funzione f (x) , x $\in$ A , si dicono sue **primitive** (o antiderivate) tutte le funzioni F (x) tali che

$$\mathbf{F'(x) = f(x)} \quad \forall x \in A$$

1.

La definizione precedente è data mediante un’equazione differenziale (cioè un’equazione in cui l’incognita è una funzione che deve essere trovata a partire da una relazione in cui compaiono certe sue derivate; dato che in questo caso compare soltanto la derivata prima, l’equazione si dice del primo ordine).

2.

Se F (x) è una primitiva di f (x) , anche F (x) + c è una primitiva di f (x) per ogni valore della costante c .

Infatti $(F(x)+c)' = F'(x) = f(x)$.

3.

<u>Se A è un intervallo</u> , **tutte** le primitive sono della forma F (x) + c ; in altre parole, su un intervallo due primitive della stessa funzione differiscono tra loro per una costante .

E' un'applicazione del teorema di Lagrange dimostrata in una precedente lezione.

4 .

Non tutte le funzioni ammettono primitive .

Ad esempio , consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} .$$

Se esistono delle primitive F (x) , devono essere necessariamente della forma :

$$F(x) = |x| + c$$

che però non sono derivabili in x = 0.

<u>Definizione</u>

Se f (x) , x $\in$ A ammette primitive , l'insieme di tutte le primitive si dice **integrale indefinito** della funzione rispetto ad x e si indica abitualmente con il simbolo $\int f(x)\,dx$.

Per quanto detto sopra , risulta :

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

essendo F (x) una particolare primitiva e c una costante arbitraria ; l'uguaglianza è valida in ogni intervallo in cui ha senso .

Esempi

1. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c$ perché D senx = cosx

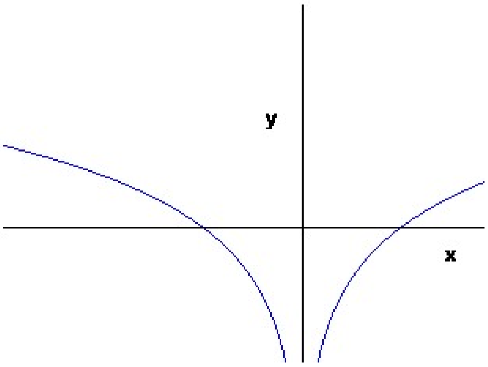
$$\int 2x\,dx = x^2 + c$$

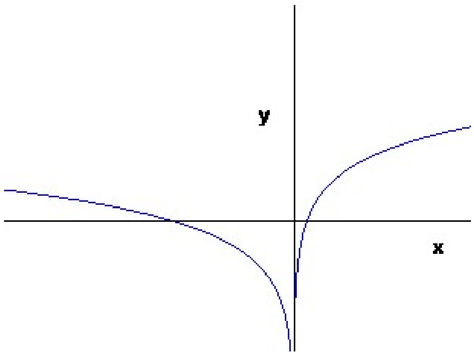
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log|x| + c$ perché D log | x | = 1 / x .

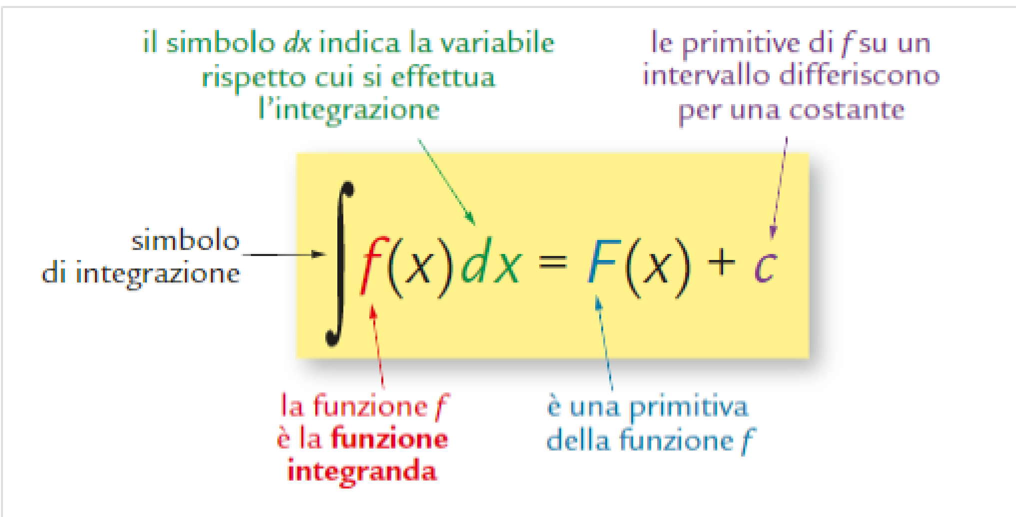
In questo caso la funzione f (x) = 1 / x è definita in **R** - { 0 } , che non è un intervallo. Il risultato precedente è valido in ogni intervallo contenuto nel dominio **R** - { 0 } , dunque in (- ∞ , 0) e in (0 , + ∞) , con la costante c che in generale non è la stessa nei due intervalli ; in altre parole , il risultato va inteso nel senso :

$$\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \log x + c & \text{se } x > 0 \\ \log(-x) + c' & \text{se } x < 0 \end{cases}$$





3. $\displaystyle\int f'(x)\,dx = f(x) + c$



Vale la pena di mettere in rilievo fin da adesso la maggiore differenza che esiste tra calcolo differenziale e calcolo integrale : se partiamo da una funzione elementare (cioè esprimibile in forma algebrica), la sua derivata è ancora una funzione elementare, per quanto complicata possa essere la sua espressione; per le primitive questo non è vero: esistono funzioni elementari (la maggior parte), anche di espressione relativamente semplice, le cui primitive non sono funzioni elementari. Qui ci limitiamo a dare pochi esempi notevoli, senza però poter giustificare l'affermazione :

$$\frac{\mathrm{sen}x}{x} \quad , \quad \frac{e^x}{x} \quad , \quad e^{\pm x^2} \quad .$$

Tabella di primitive notevoli

Funzione f (x)	Primitiva F (x)
x^{α} $(\alpha \neq -1)$	$x^{\alpha+1} / (\alpha+1)$
$1/x$	$\log \lvert x \rvert$
a^x	$a^x / \log a$
e^x	e^x
$\cos x$	$\text{sen}\, x$
$\text{sen}\, x$	$-\cos x$
$1/\cos^2 x = 1 + \text{tg}^2 x$	$\text{tg}\, x$
$1/\text{sen}^2 x$	$-1/\text{tg}\, x = -\text{cotg}x$
$1/(1+x^2)$	$\text{arctg}\, x$
$1/\sqrt{1-x^2}$	$\text{arcsen}x$, $-\arccos x$
$\log x$	$x \log x - x$
$\text{arctg}x$	$x\, \text{arctg}x - \dfrac{\log(x^2+1)}{2}$
$\text{arcsen}x$	$x\, \text{arcsen}x + \sqrt{1-x^2}$
$\arccos x$	$x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$
$\cos^2 x$	$\dfrac{x + \text{sen}x \cos x}{2}$
$\text{sen}^2 x$	$\dfrac{x - \text{sen}x \cos x}{2}$
$\sqrt{1-x^2}$	$\dfrac{x\sqrt{1-x^2} + \text{arcsen}x}{2}$
$\sqrt{1+x^2}$	$\dfrac{x\sqrt{1+x^2} + \log(x + \sqrt{1+x^2})}{2}$

La verifica dei risultati precedenti consiste nel calcolare la derivata di F (x) e controllare che in questo modo si ritrova la funzione f (x) di partenza .

Linearità dell' integrale

Le proprietà di linearità della derivata :

$$D(f+g) = Df + Dg \quad , \quad D(cf) = c\,Df$$

(c costante) diventano analoghe proprietà per l'integrale :

$$\int (f+g)\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx$$

$$\int c\,f\,dx = c\int f\,dx$$

Esempi :

$$\int (4x - \operatorname{sen}x)\,dx = 4\int x\,dx - \int \operatorname{sen}x\,dx = 2x^2 + \cos x + c$$

$$\int (2e^x - \sqrt{x})\,dx = 2\int e^x\,dx - \int \sqrt{x}\,dx = 2e^x - \frac{2}{3}x^{3/2} + c$$

Integrazione per parti

La regola di derivazione di un prodotto $D(f\,g) = f'\,g + f\,g'$, dà origine ad un importante metodo di calcolo di integrali , noto come **integrazione per parti** . Riscriviamo l'uguaglianza precedente nella forma $f'\,g = D(f\,g) - f\,g'$ e integriamo membro a membro :

$$\int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx \quad .$$

L'obiettivo è quello di sostituire l'integrale iniziale con uno più semplice .

Può essere conveniente riscrivere la formula di integrazione per parti nella forma equivalente :

$$\int u\,v\,dx = U\,v - \int U\,v'\,dx$$

avendo indicato con U una primitiva di u .

Schema operativo del metodo di integrazione per parti

$$\int u\,v\,dx = U\,v - \int U\,v'\,dx$$

di u si cerca una primitiva U

di v si scrive la derivata v'

L'obiettivo è quello di ricondurci ad un integrale che sia più facile da calcolare.

Esempi

1. $\int x^2 e^x\,dx$ $\quad (x^2 - 2x + 2)\,e^x + c$
2. $\int x\,\cos x\,dx$ $\quad \cos x + x\,\mathrm{sen}\,x + c$
3. $\int e^x\,\mathrm{sen}\,x\,dx$ $\quad e^x(\mathrm{sen}\,x - \cos x)/2 + c$

4. $\int \log x \; dx$ $\quad$ $x \log x - x + c$

5. $\int \text{arctg}\, x \; dx$ $\quad$ $x \,\text{arctg} x - \frac{\log(x^2+1)}{2} + c$

6. $\int \text{arcsen}\, x \; dx$ $\quad$ $x \,\text{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + c$

7. $\int \text{sen}^2 x \; dx$ $\quad$ $\frac{x - \text{sen}x \cos x}{2} + c$

8. $\int \cos^2 x \; dx$ $\quad$ $\frac{x + \text{sen}x \cos x}{2} + c$

Cambiamento di variabile

Prima forma : **integrazione per sostituzione**

Se F è una primitiva della funzione f , la regola di derivazione di una funzione composta

$$D\,[\,F(\varphi(x))\,] = f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$$

diventa

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + c$$

che può essere scritta anche nella forma

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt \quad \text{con } t = \varphi(x).$$

In altre parole , per trovare una primitiva di una funzione che è scritta nella forma $f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$, basta calcolare una primitiva $F(t)$ della funzione $f(t)$ e poi scrivere $F(\varphi(x))$, sostituendo cioè a t l’espressione $\varphi(x)$.

Da un punto di vista puramente mnemonico, il passaggio da un integrale all'altro si ottiene sostituendo formalmente :

$\varphi\ (x)$ con t , $\varphi'(x)\,dx$ con dt .

Esempi

1. $\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$ $\qquad \frac{\log(1+x^2)}{2} + c$

2 $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ $\qquad -\sqrt{1-x^2} + c$

3. $\int \operatorname{tg} x\,dx$ $\qquad -\log|\cos x| + c$

4. $\int \frac{dx}{x\ \log x}$ $\qquad \log|\log x + c|$

5. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x\ \cos x}$ $\qquad \log|\operatorname{tg} x| + c$

Si pone $\operatorname{tg} x = t$, $dx / \cos^2 x = dt$.

6. $\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x + 1}\,dx$ $\qquad \frac{\log(1+\operatorname{sen}^2 x)}{2} + c$

Si pone $\operatorname{sen}^2 x + 1 = t$, $2 \operatorname{sen} x \cos x\, dx = dt$.

7. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$ $\qquad \log\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + 1} + c$

Si pone $\cos x = t$, $-\operatorname{sen} x\ dx = dt$

8. $\int \frac{dx}{\cos x}$ $\qquad \log\frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x} + c$

Si pone $\operatorname{sen} x = t$, $\cos x\ dx = dt$.

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ $\qquad \operatorname{arcsen}(x/2) + c$

Si pone $x / 2 = t$, $dx = 2\ dt$,

<u>Seconda forma</u> : **cambiamento di variabile**

Riscriviamo la formula di sostituzione da destra a sinistra e scambiando x e t tra di loro:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \quad , \quad \text{con } t = \varphi^{-1}(x).$$

Per la validità di questo risultato è richiesto che la funzione φ (t) che esprime il cambiamento di variabile sia **invertibile**, ipotesi non richiesta nella prima formulazione del problema .

Così ad esempio nell'integrale $\int x\sqrt{x^2 - 1}\,dx$ possiamo porre $t = x^2 - 1$, anche se la funzione che esprime il cambiamento di variabile non è invertibile ; la presenza del fattore x permette di applicare il metodo di sostituzione. Al contrario, nell'integrale $\int \sqrt{x^2 - 1}\,dx$ questo stesso cambiamento di variabile non è lecito , perché non invertibile , a meno di studiare separatamente il caso x > 1 e quello x < -1 : in ciascuno di questi intervalli la funzione che esprime il cambiamento di variabile diventa invertibile .

Schema operativo

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \quad , \quad \text{con } t = \varphi^{-1}(x).$$

1. Si sceglie un cambio di variabile $x = \varphi(t)$.
2. Nell'integrale si sostituisce x con $\varphi(t)$ e dx con $\varphi'(t)\,dt$.
3. Si calcola l'integrale nella variabile t ottenuto con le regole dette.
4. Nelle primitive trovate , si sostituisce t con $\varphi^{-1}(x)$, in modo da ritornare alla variabile x iniziale.

Riassumendo

PUNTO DI PARTENZA $x = \varphi(t)$

PUNTO FINALE $t = \varphi^{-1}(x)$.

Di seguito vedremo alcuni dei **principali cambiamenti di variabile**.

Nota: Nella maggior parte degli esempi che daremo, il cambiamento di variabile porta all'integrale di una funzione **razionale** (rapporto tra due polinomi, argomento che tratteremo succesivamente).

Se l'integrale contiene il termine :

- $\sqrt{\mathbf{a\,x+b}}$

  si pone $\sqrt{a\,x+b}$ = t

  x = (t^2 – b) / a , dx = (2 t / a) dt

  ATTENZIONE : viene dato il PUNTO FINALE t in funzione di x (prima riga) , invece per iniziare ci serve x in funzione di t , che deve essere dunque calcolata (seconda riga).

<u>Esempio</u> $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x+1}}$

Si pone $\sqrt{x+1}$ = t → x = t^2 – 1 , dx = 2 t dt

$$\int \frac{2\,t}{(2-t^2)\,t}\,dt = \int \frac{2}{2-t^2}\,dt$$

che è di tipo razionale (= integrale di una funzione razionale).

L'esercizio deve essere ripreso e completato dopo aver visto come si trattano questi integrali.

- $\sqrt{\dfrac{\mathbf{a\,x+b}}{\mathbf{c\,x+d}}}$

si pone $\sqrt{\dfrac{a\,x+b}{c\,x+d}} = t$

Anche in questo caso per iniziare occorre ricavare x in funzione di t.

<u>Esempio</u> $\int \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\ dx$

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = t \ \rightarrow\ x = \frac{t^2-1}{t^2+1} \quad , \quad dx = \frac{4t}{(t^2+1)^2}\ dt$$

$$\int \frac{4t^2}{(t^2+1)^2}\ dt = \ldots..$$

- $\sqrt{\mathbf{a\,x^2+b\,x+c}}$ con $a > 0$

si pone $\sqrt{a\,x^2+b\,x+c} - \sqrt{a}\ x = t$

<u>Esempio</u> $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

Poniamo $\sqrt{x^2+1} - x = t$ cioè $\sqrt{x^2+1} = x + t$

da cui

$$x = \frac{1-t^2}{2\,t} \ ,\ \sqrt{x^2+1} = \frac{1-t^2}{2\,t} + t = \frac{1+t^2}{2\,t} \ ,\ dx = -\frac{1+t^2}{2\,t^2}\ dt\ .$$

L'integrale diventa

$$-\int \frac{2\,t}{1+t^2}\ \frac{1+t^2}{2\,t^2}\ dt = -\int \frac{dt}{t} = -\log\ |\ t\ |\ +\ c\ =$$

$$= \log \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} + c = \log(\sqrt{x^2+1} + x) + c$$

- $\sqrt{\mathbf{a\,x^2 + b\,x + c}}$ con a < 0

  si scrive la funzione nella forma $H^2 - X^2$;

  si pone X (x) = H sen t

<u>Esempio</u> $\int \sqrt{1-x^2}\ dx$

Il termine sotto radice è già nella forma differenza di quadrati (X = x , H = 1).

Poniamo x = sen t , con $t \in [-\pi/2 , \pi/2]$ in modo che t assuma tutti i valori dell'intervallo [-1 , 1] e in più la funzione che esprime il cambiamento di variabile sia invertibile :

$$x = \operatorname{sen} t \ , \ \sqrt{1-x^2} = \cos t \ , \ dx = \cos t \ dt .$$

L'integrale diventa

$$\int \cos^2 t \ dt = \frac{t + \operatorname{sen} t \cos t}{2} + c = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1-x^2}\right) + c$$

<u>Esempio</u> $\int \sqrt{1+x-x^2}\ dx$

$\mathbf{x^2 - x} - 1 = (x - ½)^2 - 5/4$ completamento del quadrato ;

$1 + x - x^2 = 5/4 - (x - ½)^2$

<u>oppure</u>

$x^2 - x - 1 = 0$ per $x = (1 \pm \sqrt{5})/2$;

$x^2 - x - 1 = (x - 1/2 - \sqrt{5}/2) (x - 1/2 + \sqrt{5}/2) = (x - 1/2)^2 - 5/4$

Poniamo $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\,\text{sen}t$ ($-\pi/2 \le t < \le \pi/2$) , $dx = \frac{\sqrt{5}}{2}\cos t\, dt$

$$\int \sqrt{\frac{5}{4} - \frac{5}{4}\text{sen}^2 t}\ \frac{\sqrt{5}}{2}\cos t\ dt = \frac{5}{4}\int \cos^2 t\, dt = \frac{5}{8}\,(t + \text{sen}t\cos t) + c$$

$$x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\text{sen}t \rightarrow \text{sen}t = \frac{2x-1}{\sqrt{5}} \rightarrow t = \text{arcsen}\,\frac{2x-1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos t = \sqrt{1 - \text{sen}^2 t} = \sqrt{1 - \frac{(2x-1)^2}{5}} = \sqrt{\frac{5 - (2x-1)^2}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{1 - x - x^2}$$

<u>Esempio</u> $\int \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}}$

$x^2 - x = (x - ½)^2 - ¼$

$x - ½ = ½\,\text{sen}t$, $dx = ½ \cos t\, dt$

$$\int \frac{1/2\ \cos t}{\sqrt{1/4 - 1/4\,\text{sen}^2 t}}\, dt = \int dt = t + c = \text{arcsen}\,(2x - 1) + c$$

Avremmo anche potuto scrivere $\sqrt{x - x^2} = \sqrt{x}\ \sqrt{1-x}$ (osservare che la radice a primo membro è definita per $0 < x < 1$, quindi le due radici a secondo membro hanno entrambe senso).

Ponendo $\sqrt{x} = t$, si ottiene : $\int \frac{2t}{t\sqrt{1-t^2}}\, dt = 2\,\text{arcsen}\, t + c = 2\,\text{arcsen}\sqrt{x} + c$

I due risultati , apparentemente diversi, sono invece entrambi corretti : le due funzioni differiscono per una costante. <u>Esercizio</u>: trovare questa costante.

Esempio $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$

Potremmo procedere come prima, ponendo x = 2 sent.

E' più semplice però usare il metodo di sostituzione ponendo $4 - x^2 = t$, $-2x\,dx = dt$, cioè $x\,dx = -dt/2$.

- **senx , cosx**

si pone $tg(x/2) = t$, $dx = 2/(1+t^2)\,dt$

si usano le formule parametriche :

$sen\, x = 2t/(1+t^2)$, $\cos x = (1-t^2)/(1+t^2)$

Esempio $\int \frac{dx}{2\, sen\, x + \cos x - 1}$

Procedendo come indicato, l'integrale diventa

$$\int \frac{1}{\frac{4t+1-t^2-1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int \frac{dt}{2t-t^2}$$

che è l'integrale di una funzione razionale.

Anticipiamo il metodo di integrazione (che sarà esposto successivamente):

$$\frac{1}{2}\int \left\{ \frac{1}{t} + \frac{1}{2-t} \right\} dt = \frac{1}{2}\left\{ \log|t| - \log|2-t| \right\} + c = \frac{1}{2}\log\left|\frac{tg\, x/2}{1-tg\, x/2}\right| + c$$

Esempio $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\, dx$

$$\int \frac{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\ \frac{2}{1+t^2}\ dt\ =\ \int\ \frac{2\,t^2}{1+t^2}\ dt\ =\ 2\ \int\ \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\ dt\ =\ 2\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right) dt$$

=

= 2 (t – arctg t) + c = 2 tg x/2 - x + c

Ci sono dei casi particolari in cui conviene usare il metodo di sostituzione:

- **Se la funzione è dispari in senx**

  si può scrivere nella forma senx f (cosx)

  si sostituisce cosx = t , - senx dx = dt

<u>Esempio</u> $\int \frac{dx}{sen^3x}$

$$\int \frac{senx}{sen^4x}\ dx\ =\ \int\ \frac{senx}{(1-\cos^2x\ )^2}\ dx\ \underset{\cos x = t}{=}\ -\int\ \frac{dt}{(1-t^2\ )^2}\ =\ ......$$

- **Se la funzione è dispari in cosx**

  si può scrivere nella forma cosx f (senx)

  si sostituisce senx = t , cosx dx = dt

Esempio $\displaystyle\int \frac{dx}{(2 - \operatorname{sen}x)\cos x}$

$$\int \frac{dx}{(2 - \operatorname{sen}x)\cos x} = \int \frac{\cos x}{(2 - \operatorname{sen}x)(1 - \operatorname{sen}^2 x)}\, dx = \int \frac{dt}{(2 - t)(1 - t^2)} = \ldots\ldots$$

- **Se la funzione è pari nella coppia senx , cosx**

  si può scrivere nella forma f (tgx)

  si sostituisce tgx = t , dx = dt / (1 + t^2)

Esempio $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}\, dx$

$$\int \frac{\cos^2 x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}\, dx = \int \frac{\cos^2 x}{2\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}\, dx =$$

$$= \int \frac{dx}{2\operatorname{tg}^2 x + 1} = \int \frac{dt}{(2t^2 + 1)(1 + t^2)} = \ldots\ldots$$

Esempio $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen}^2 x}$

$$\int \frac{dx}{2\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}\, dx = \int \frac{dx}{(2\operatorname{tg}^2 x + 1)\cos^2 x}\, dx = \ldots = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) + c\ .$$

La funzione integranda è continua in R , quindi ammette primitive in R.

Data la periodicità, cerchiamo le primitive nell'intervallo [0 , π] .

La funzione

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)$$

che abbiamo trovato non è definita in π/2 , quindi non è una primitiva in [0 , π].

L'informazione contenuta nel calcolo dell'integrale indefinito deve essere intesa in senso corretto : le primitive cercate hanno la forma

$$G(x) = \begin{cases} \varphi(x) + \alpha & \text{se } 0 \le x < \pi/2 \\ \varphi(x) + \beta & \text{se } \pi/2 < x \le \pi \end{cases}$$

dove α e β sono costanti arbitrarie indipendenti . Si ricordi infatti che le primitive sono date a meno di una costante arbitraria in ogni **intervallo** in cui sono definite; nel caso che stiamo esaminando gli intervalli sono due, tra loro disgiunti .

Prolunghiamo per continuità G (x) per x = π /2 : poiché risulta

$$\text{per } x \to \pi/2^- \quad G(x) \to \pi/(2\sqrt{2}) + \alpha$$

$$\text{per } x \to \pi/2^+ \quad G(x) \to -\pi/(2\sqrt{2}) + \beta$$

dobbiamo imporre che sia

$$\beta = \pi/\sqrt{2} + \alpha \ .$$

Le funzioni

$$G(x) = \begin{cases} \varphi(x) + \alpha & \text{se } 0 \le x \le \pi/2 \\ \varphi(x) + \pi/\sqrt{2} + \alpha & \text{se } \pi/2 \le x \le \pi \end{cases}$$

così ottenute sono anche derivabili per x = π / 2 :

$$\text{per } x \to \pi/2^{\pm} \quad G'(x) = f(x) \to f(\pi/2).$$

Abbiamo in tal modo ottenuto le primitive della funzione f (x) nell'intervallo considerato; come sapevamo dovesse essere, le primitive trovate dipendonom da una (una sola) costante arbitraria.

Integrale di funzioni razionali $P(x) / Q(x)$

Metodo di scomposizione di Hermite

1. gr P < gr Q

In caso contrario, possiamo eseguire la divisione tra i due polinomi, ottenendo

$$P(x) = S(x)\, Q(x) + R(x) \text{ , con gr } R < \text{ gr } Q \text{ ;}$$

dunque :

$$P(x) / Q(x) = S(x) + R(x)/Q(x) .$$

L'integrale del polinomio $S(x)$ è immediato ; la funzione $R(x) / Q(x)$ adesso ha la proprietà richiesta: il grado del polinomio al numeratore è inferiore a quello del polinomio al denominatore.

2. Q è scomposto in fattori primi in campo reale

$$Q(x) = c\,(x - a_1)^{m_1} \; ..... \; [(x - p_1)^2 + q_1^2]^{\mu_1} \; .....$$

ovvero

$$Q(x) = c\,(x - a_1)^{m_1} \; ..... \; (x^2 + b_1 x + c_1)^{\mu_1} \; .....$$

dove :

m_i è la molteplicità della radice reale a_i

μ_j è la molteplicità della coppia di radici complesse $p_j \pm i\, q_j$

(se uno di questi numeri vale 1, la corrispondente radice si dice semplice) .

Ciò stabilito , si cerca una scomposizione della funzione razionale nella forma :

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{A_i}{x - a_i} + \sum_{j=1}^{s} \frac{B_j\, x + C_j}{(x - p_j)^2 + q_j^{\,2}} + \frac{d}{dx} \frac{T(x)}{R(x)}$$

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{A_i}{x - a_i} + \sum_{j=1}^{s} \frac{B_j\, x + C_j}{x^2 + + b_j x + c_j} + \frac{d}{dx} \frac{T(x)}{R(x)}$$

i termini nella prima somma sono dovuti ad eventuali radici reali

i termini nella seconda somma sono dovuti ad eventuali radici complesse

il termine derivato è dovuto alla presenza di eventuali radici multiple .

In quest'ultimo termine:

R (x) è il polinomio ottenuto dalla scomposizione di Q (x) diminuendo di 1 ciascun esponente; in tal modo contribuiscono a definire R (x) solo le eventuali radici multiple

T (x) è un generico polinomio da determinare, il cui grado è quello di R (x) diminuito di 1.

L'integrale della funzione razionale è dunque ricondotto alla somma di integrali della forma:

$$\int \frac{dx}{x - a}$$

$\displaystyle\int \frac{A\,x + B}{(x - p)^2 + q^2}\, dx$ (con $q \neq 0$) , ovvero $\displaystyle\int \frac{A\,x + B}{x^2 + a\,x + b}\, dx$ (con $\Delta < 0$)

$$\int \frac{d}{dx} \frac{T(x)}{R(x)}\, dx$$

Rimane da stabilire come si calcolano gli integrali della seconda forma.

Cominciamo con il caso particolare in cui al numeratore manca il termine in x.

$$\int \frac{dx}{(x-p)^2 + q^2} = \frac{1}{q} \operatorname{arctg}\left(\frac{x-p}{q}\right) + c \quad (q \neq 0)$$

Esempio: $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$

$$\frac{1}{(x+1/2)^2+3/4} = \frac{1}{(3/4)\left(\frac{(x+1/2)^2}{3/4}+1\right)} = \frac{4/3}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}$$

Poniamo

$$\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = t \quad . \; dx = \frac{\sqrt{3}}{2} dt$$

L'integrale proposto diventa:

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} t + c = \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$$

Per il caso generale si ha invece il seguente risultato.

$$\int \frac{Ax+B}{(x-p)^2+q^2}\, dx = \frac{A}{2} \log\left[(x-p)^2 + q^2\right] + \frac{Ap+B}{q} \operatorname{arctg}\left(\frac{x-p}{q}\right) + c$$

Infatti, operando in modo che al numeratore compaia la derivata del denominatore , possiamo riscrivere l'integrale nella forma :

$$\frac{A}{2}\int \frac{2(x-p)}{(x-p)^2+q^2}\,dx \;+(Ap+B)\int \frac{dx}{(x-p)^2+q^2}$$

Il primo integrale è di calcolo immediato (proprio per come l'abbiamo costruito) , il secondo è del tipo precedentemente visto.

Esempio: $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+x+1}\,dx$

Operiamo in modo che al numeratore compaia 2 x + 1 , che è la derivata del denominatore.

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+1-1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

Il primo integrale fornisce $\frac{1}{2}\log(x^2+x+1)$ + c ; l'altro è del tipo visto (e calcolato) sopra.

Guardiamo in dettaglio come si ottiene la scomposizione di Hermite.

1. Q (x) ha solo radici reali semplici

Ad esempio $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x+1)}$

Si cerca di scrivere la funzione razionale nella forma

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}$$

Deve dunque risultare per ogni x :

A (x + 1) + B x = 1 (*)

cioè

$$(A + B) x + (A - 1) = 0 .$$

Poiché un polinomio è identicamente nullo se e solo se i suoi coefficienti sono nulli, deve essere

$$A + B = 0 , \; A = 1 \quad \text{cioè} \quad A = 1 , \; B = -1 .$$

Allo stesso risultato saremmo arrivati , ponendo nella (*) prima x = 0 e poi x = -1 (cioè il valore delle due radici) .

Una volta scritta la funzione razionale nella forma

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

l'integrazione è immediata e fornisce log | (x + 1) / (x - 1) | + c .

2. Q (x) ha solo radici complesse semplici (a coppie coniugate)

Ad esempio : $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$

Si cerca di scrivere la funzione razionale nella forma

$$\frac{A + B x}{x^2 + 1} + \frac{C + D x}{x^2 + 4} .$$

Procedendo come sopra , deve risultare per ogni x :

$$(B + D) x^3 + (A + C) x^2 + (4 B + D) x + (4 A + C - 1) = 0 .$$

Risolvendo il sistema ottenuto annullando i coefficienti di questo polinomio , si ottiene :

$A = 1/3 \ , \ B = 0 \ , \ C = -1/3 \ , \ D = 0 .$

La funzione razionale può essere dunque scritta nella forma

$$\frac{1/3}{x^2+1} - \frac{1/3}{x^2+4} \ ;$$

integrando , si ottiene :

$$\frac{1}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + c .$$

3. Q (x) ha radici reali e complesse semplici

Ad esempio : $\int \frac{dx}{x^3+1}$

Scomponiamo il polinomio al denominatore :

$$x^3 + 1 = (x + 1) (x^2 - x + 1) \ .$$

Poiché

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right) \left(x - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right) = ((x - 1/2)^2 + 3/4) \ ,$$

possiamo riscrivere la scomposizione nella forma equivalente :

$$x^3 + 1 = (x + 1) \ ((x - 1/2)^2 + 3/4).$$

Cerchiamo di scrivere la funzione razionale nella forma :

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1}$$

Deve risultare per ogni x :

$$(A + B) x^2 + (B + C - A) x + (A + C - 1) = 0$$

e ciò accade se

$$A = 1/3 \quad , \quad B = -1/3 \quad , \quad C = 2/3 .$$

Dunque l'integrale diventa :

$$\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{x}{x^2 - x + 1} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^2 - x + 1} .$$

Poiché

$$\int \frac{dx}{x+1} = \log|x+1| + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \int \frac{dx}{(x - 1/2)^2 + 3/4} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$$\int \frac{x}{(x - 1/2)^2 + 3/4}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \log(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

si ottiene in definitiva come valore dell'integrale proposto

$$\frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{6}\log(x^2 - x + 1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

4. Q (x) ha almeno una radice non semplice

Ad esempio : $\int \frac{x+2}{x^2(x-2)}\, dx$

Si cerca di scrivere la funzione nella forma :

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{d}{dx}\frac{C}{x}$$

cioè

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} - \frac{C}{x^2} .$$

In questa scomposizione i primi due termini sono dovuti alle due radici (reali) , come abbiamo visto nel punto 1 ; il terzo termine tiene conto della molteplicità della radice x = 0. Procedendo come abbiamo già fatto nei casi precedenti , si trova che deve essere

A = -1 , B = 1 , C = 1 .

Si ottiene dunque la scomposizione della funzione integranda nella forma :

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} + \frac{d}{dx}\frac{1}{x} .$$

Integrando , si ottiene :

$$\int \frac{x+2}{x^2(x-2)}\, dx = \log\left|\frac{x+2}{x}\right| + \frac{1}{x} + c$$

Consideriamo un secondo esempio :

$$\int \frac{x^2 + x}{(x^2+4)^2}\, dx$$

in cui le radici multiple sono complesse .

Si cerca di scrivere la funzione nella forma

$$\frac{A\,x+B}{x^{2}+4}+\frac{d}{dx}\,\frac{C\,x+D}{x^{2}+4}\ .$$

Il primo termine è dovuto alla coppia di radici complesse coniugate come abbiamo già visto nel punto 2 , il secondo alla loro molteplicità . Procedendo nel modo consueto (dopo aver calcolato la derivata) , si trova che deve essere

$A = 0$, $B = 1/2$, $C = -1/2$, $D = -1/2$.

La scomposizione assume dunque la forma :

$$\frac{1/2}{x^{2}+4}-\frac{1}{2}\,\frac{d}{dx}\,\frac{x+1}{x^{2}+4}$$

e quindi per l'integrale si ottiene :

$$\int\frac{x^{2}+x}{(x^{2}+4)^{2}}\,dx=\frac{1}{4}\,\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\,\frac{x+1}{x^{2}+4}+c\,.$$

Studiamo adesso come ulteriore esempio l'integrale

$$\int\frac{dx}{x^{2}\,(x^{2}+1)^{2}}\,.$$

In questo caso il polinomio al denominatore presenta radici multiple sia reali che complesse ; si cerca una scomposizione della funzione razionale nella forma :

$$\frac{A}{x}+\frac{B\,x+C}{x^{2}+1}+\frac{d}{dx}\,\frac{D\,x^{2}+E\,x+F}{x\,(x^{2}+1)}$$

e si procede nel modo già illustrato negli esempi precedenti .

Per quanto riguarda il termine dovuto alla presenza di radici multiple , osserviamo che al denominatore appare un polinomio ben preciso di grado 3 , al numeratore un polinomio da determinare di grado 2 . La regola che al numeratore appaia un polinomio di grado uguale a quello del denominatore diminuito di 1 è una regola generale ed è seguita anche negli altri termini della scomposizione .

Prima di effettuare i calcoli , vale la pena di osservare che la funzione razionale assegnata è pari e dunque tale deve essere la sua scomposizione ; tenendo anche conto del fatto che la derivata di una funzione dispari è una funzione pari e viceversa , possiamo scegliere A = B = E = 0 e dunque cercare una scomposizione nella forma :

$$\frac{C}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\,\frac{D\,x^2 + F}{x\,(x^2+1)} \;;$$

in questo modo abbiamo ridotto il numero di coefficienti da determinare e questo facilita il calcolo . Sviluppando i calcoli, si trova:

$$C = D = -3/2 \quad , \quad F = -1 \;;$$

dunque la funzione razionale si scompone nella forma

$$-\frac{3}{2}\,\frac{1}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\,\frac{(-3/2)\,x^2 - 1}{x\,(x^2+1)} \;;$$

il suo integrale è immediato :

$$-\frac{3}{2}\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{(3/2)\,x^2 + 1}{x\,(x^2+1)} + c\,.$$