La definizione di integrale

Notazioni: • s_n, S_n somme integrali inferiori e superiori ottenute per bisezioni successive dell'intervallo $[a, b]$

• $l = \inf f$, $L = \sup f$

$l(b-a)$ $\quad s_n \longrightarrow s \quad S \longleftarrow S_n$ $\quad L(b-a)$

crescono $\qquad$ decrescono

Def. $\quad f$ integrabile $\Longleftrightarrow s = S$

$\int_a^b f\,dx$ è il valore comune ai due limiti (lo indichiamo con I)

Proprietà $\quad I$ separa i due insiemi di somme (ovvio)

I è l'unico elemento di separazione

Per assurdo, se J fosse un altro elemento di separazione:

$s_n \quad I \quad J \quad S_n$ ↳ non potrebbero tendere ad I

$s_n \quad J \quad I \quad S_n$

↳ non potrebbero tendere ad I

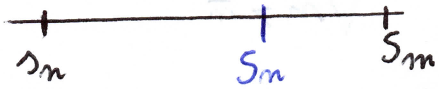
Def. alternativa

f integrabile $\Longleftrightarrow \{s_n\}, \{S_n\}$ sono contigui (oltre che separati)

Contigui: $\forall \varepsilon > 0, \ \exists m, n :$ $\quad s_m \overset{< \varepsilon}{\longleftrightarrow} S_m$

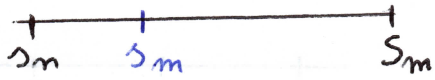
Osservazione: nella definizione di contiguità possiamo supporre $n = m$.

Se fosse $n > m$:



le somme superiori decrescono

Se fosse $n < m$



le somme inferiori decrescono

Riassumendo, la definizione alternativa diventa:

Def.: f integrabile $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists n : S_n - s_n < \varepsilon$

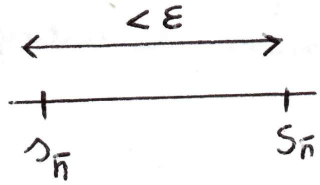
Le due definizioni sono equivalenti.

Infatti

(1)

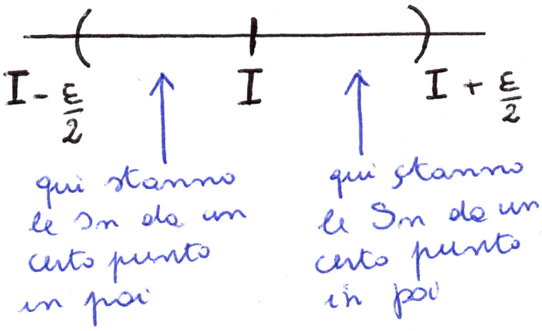
Hp.

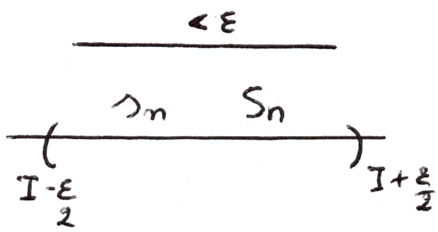
$\Longrightarrow$



Th.

dimostrazione



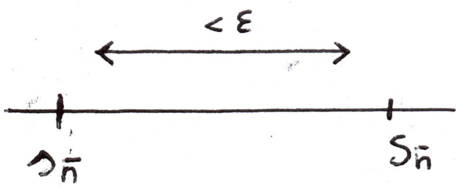


dunque, definitivamente:

$S_n - s_n < \varepsilon$

(a noi basterebbe fosse vero anche per un solo n).

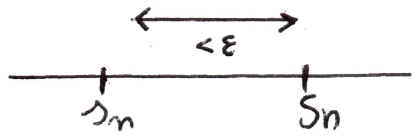
(2)



Hp

$\Longrightarrow$

Th



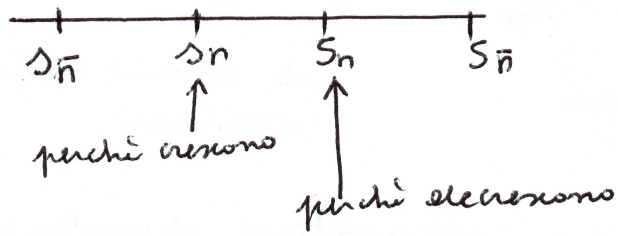
Infatti sappiamo che $s_n \to s$, $S_n \to S$ e dunque

$S_n - s_n \longrightarrow S - s$.

Dobbiamo provare che è $S = s$, cioè $S - s = 0$

dimostrazione

$\forall n > \bar{n}$



Osservazione

In entrambe le definizioni l'integrale è l'unico elemento di separazione dei due insiemi.
Le due definizioni di integrale sono dunque equivalenti.