## L'insieme C dei numeri complessi

I numeri complessi furono introdotti nel XVI secolo, partendo dallo studio delle equazioni di terzo grado. Nella storia della matematica è famosa la disputa che contrappose Fontana ( più noto come Tartaglia ) e Cardano circa la paternità della formula risolutiva di tali equazioni. In ogni caso, centrale nella risoluzione è la possibile presenza di radici quadrate di numeri negativi. Pur rendendosi conto che quei numeri non esistevano, Cardano li usò con disinvoltura, forte del fatto che alla fine dei calcoli necessari questi numeri sparivano. Cartesio nel XVII secolo introdusse il termine "immaginario" , Eulero nel XVIII secolo l'uso della lettera i per indicare l'unità immaginaria ( una delle due soluzioni dell'equazione $x^2 = -1$, l'altra essendo – i ).

Fra i motivi che hanno a lungo ostacolato la comprensione dei numeri complessi c'è sicuramente la mancanza di una loro rappresentazione geometrica. Si deve soprattutto a Gauss ( vissuto tra il XVIII e il XIX secolo ) l'affermarsi del concetto di piano complesso, cioè la possibilità di stabilire una corrispondenza biunivoca tra i numeri complessi e i punti di un piano cartesiano, fornendo così una interpretazione geometrica all'addizione e alla moltiplicazione di due numeri complessi e facendo così apparire più naturali da un punto di vista intuitivo queste operazioni. Dobbiamo a Gauss anche la denominazione "numeri complessi" da usare in luogo di "numeri immaginari" o "numeri impossibili" allora in uso, che secondo il suo giudizio avevano reso questo concetto misterioso ed oscuro.

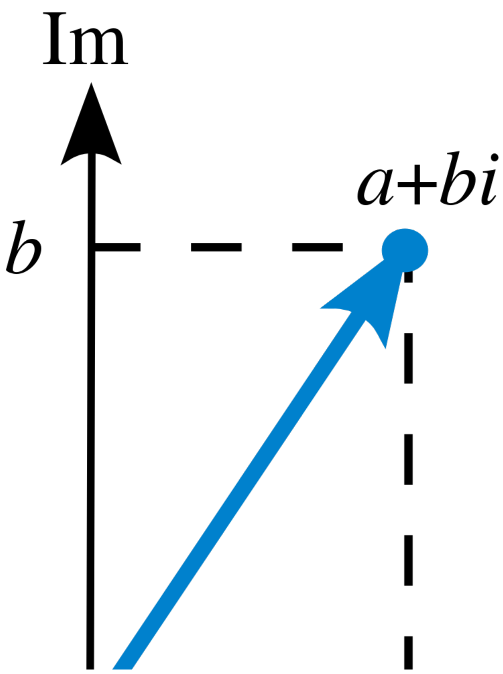
**Forma algebrica** dei numeri complessi

$$z = a + i\,b = a + b\,i$$

dove

- a e b sono numeri reali: a è detto **parte reale** del numero complesso, b **parte immaginaria ; scriveremo** $a = \mathcal{R}e\, z$ $\quad b = \mathcal{I}m\, z$
- i è detta unità immaginaria.

Rappresentazione dei numeri complessi come punti del piano cartesiano o vettori del piano:




Due numeri complessi z = a + i b , z’ = a’ + i b’ sono **uguali** se hanno la stessa parte reale e la stessa parte immaginaria:  a = a’ , b = b’.

I numeri complessi a + i 0 ( cioè quelli a parte immaginaria nulla ) si scrivono semplicemente a e sono dunque identificati con i numeri reali; questa identificazione permette di vedere **R** come sottoinsieme di **C**.

Analogamente, i numeri della forma 0 + i b ( a parte reale nulla ) si scrivono i b e sono detti **immaginari** puri.

Visualizzazione dei numeri reali e dei numeri immaginari nel piano complesso.

Dal punto di vista algebrico vogliamo che C abbia le seguenti proprietà :

- C è un corpo commutativo ( o campo ) ( quindi devono essere definite una somma ed un prodotto con le stesse proprietà viste per i numeri razionali , passate poi ai reali )
- C contiene R come sottocorpo ( abbiamo già detto che C contiene R come sottoinsieme; dire che lo contiene come sottocorpo significa che sui reali le operazioni complesse si riducono a quelle reali )
- il prodotto è definito in modo che sia $i^2 = -1$.

Come conseguenza delle richieste precedenti, dati due numeri complessi:

$$z = a + i\,b \quad , \quad z' = a' + i\,b' ,$$

la loro **somma** e il loro **prodotto** sono necessariamente dati da:

$$z + z' = (a + a') + i\,(b + b')$$

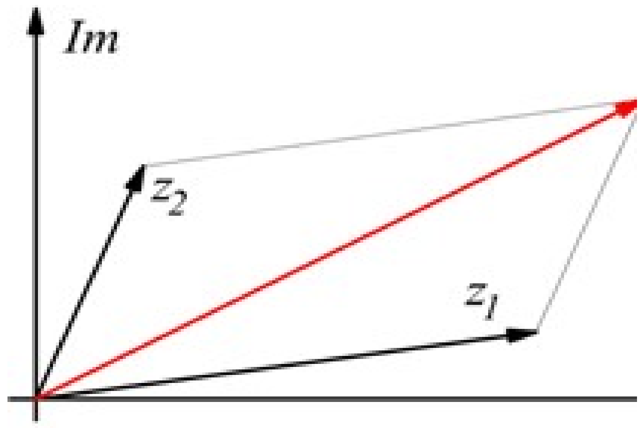
$$z\,z' = (a\,a' - b\,b') + i\,(a\,b' + a'\,b).$$

Per trovare la somma di due numeri complessi basta dunque sommare separatamente le parti reali e quelle immaginarie.

Per quanto riguarda il prodotto, osservato che in base alla definizione data risulta $i^2 = -1$ come richiesto (basta sostituire $a = a' = 0$ , $b = b' = 1$), la regola che lo definisce è la stessa del prodotto tra due polinomi in i, con l'avvertenza di sostituire $i^2$ con -1.

Si osservi che se z e z' sono reali ( $b = b' = 0$ ) , le due operazioni si riducono alla somma e al prodotto in campo reale.

Interpretazione geometrica della somma ( regola del parallelogramma ) :



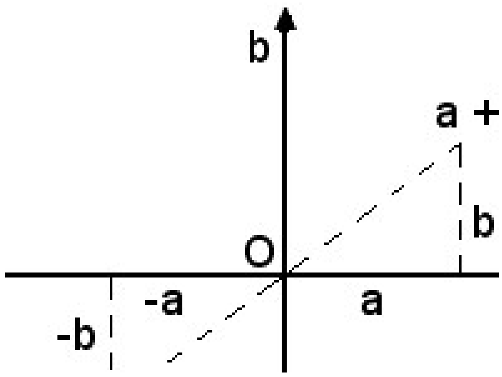

Anche il prodotto ha una rappresentazione geometrica, che vedremo più avanti.

I numeri reali 0 e 1 sono gli **elementi neutri**, rispettivamente per la somma e per il prodotto ( come già lo erano in campo reale ):

$$z + 0 = z \quad , \quad z\ 1 = z.$$

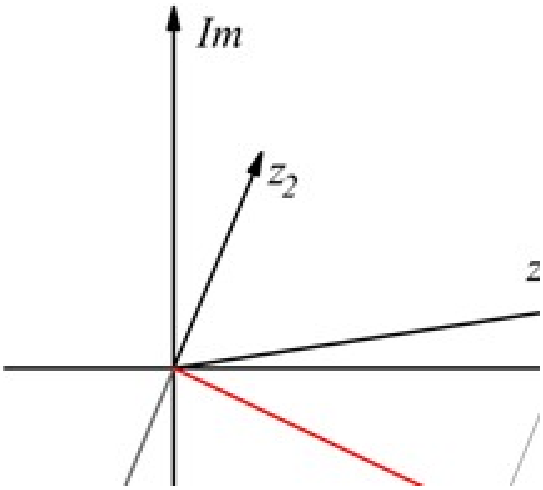
L'**opposto** di z è dato da

$$-z = (-a) + i\,(-b)$$




e quindi la **differenza** z ' - z (cioè la somma di z ' con l'opposto di z ) vale

$$z' - z = (a' - a) + i\,(b' - b)\,.$$




L' **inverso** di z ≠ 0 è dato da:

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\,\frac{b}{a^2+b^2}\ .$$

Infatti l'inverso del numero complesso non nullo z è la soluzione w dell'equazione z w = 1. Se poniamo z = a + i b, w = x + i y , eseguiamo il prodotto e separiamo la parte reale da quella immaginaria, l'equazione complessa dà origine ad un sistema lineare di due equazioni nelle due incognite x ed y:

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti ha determinante uguale ad $a^2 + b^2$ , che per ipotesi è diverso da 0 ( infatti abbiamo supposto z ≠ 0 ) e dunque il sistema ha una ed una sola soluzione, data proprio da

$$x = \frac{a}{a^2+b^2}\ ,\ y = \frac{b}{a^2+b^2},$$

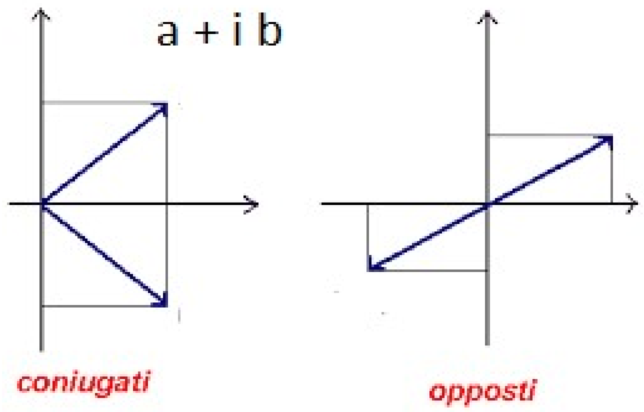
come si ottiene ad esempio usando la regola di Cramer.

Più avanti vedremo una interpretazione geometrica del risultato.

Un modo alternativo ( e più semplice ) per ottenere l'inverso

$$\bar{z} = a - i\, b$$

detto **coniugato** di z.



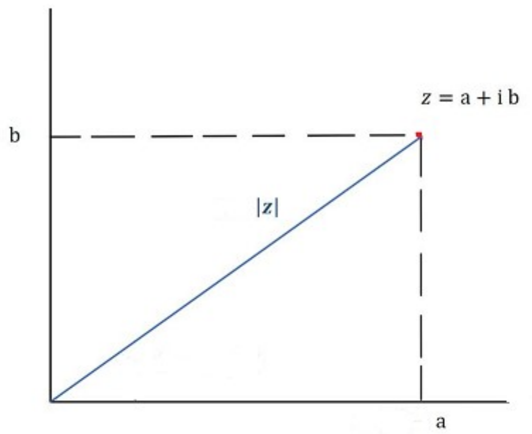

Per esso risulta:

$$z\,\bar{z} = a^2 + b^2,$$

che è un numero reale ≥ 0, nullo solo per z = 0. Poniamo

$$|z| = \sqrt{z\,\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

e diciamo **modulo** di z questo numero. (Osserviamo che per i numeri reali, il modulo coincide con il valore assoluto).



Allora:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\,\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\,\frac{b}{a^2+b^2}$$

ritrovando il risultato ottenuto per altra via.

In maniera analoga, per ottenere il rapporto z’ / z tra due numeri complessi ( cioè il prodotto di z’ per l’inverso di z ) , si può procedere come segue:

$$\frac{z'}{z} = \frac{z'\,\bar{z}}{z\,\bar{z}} = \frac{a\,a' + b\,b'}{a^2+b^2} + i\,\frac{a\,b' - a'\,b}{a^2+b^2}\,.$$

<u>Esempi</u>

Se z = 1 + 2 i e z ’ = 2 – 3 i, le definizioni precedenti forniscono:

z ’ + z = 3 - i

z ’ - z = 1 – 5 i

z z ’ = 8 + i

$|z| = \sqrt{5}$

1 / z = $\frac{1}{5} - \frac{2}{5}\,i$

z ’ / z = $\frac{1}{5}\,(2-3i)(1-2i) = \frac{-4-7i}{5}$ .

Osservazione : proprietà del coniugato

$$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'} \qquad \overline{z-z'} = \overline{z} - \overline{z'}$$

$$\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'} \qquad \overline{z/z'} = \overline{z} / \overline{z'}$$

$$\overline{\overline{z}} = z \qquad \overline{z} = z \iff z \in R$$

**Ordinamento dei numeri complessi**

Introdurre in un insieme A una relazione di ordinamento (totale) significa definire la scrittura $z \le w$ per gli elementi di A, in modo da verificare le proprietà:

$z \le z$ (proprietà riflessiva)

$z \le w,\ w \le z \Rightarrow z = w$ (proprietà antisimmetrica)

$z \le w,\ w \le v \Rightarrow z \le v$ (proprietà transitiva)

per ogni z, w $z \le w$ oppure $w \le z$ (ordinamento totale).

In R e in Q la relazione minore o uguale ha queste proprietà; inoltre essa è legata alle proprietà algebriche della somma e del prodotto dal fatto che:

$$z \le w \Rightarrow z + v \le w + v\ ,\ \forall v$$

$$z \le w \Rightarrow z\, v \le w\, v\ ,\ \forall v \ge 0\ . \qquad (*)$$

Da queste si deducono tutte le altre proprietà che si usano comunemente nel calcolo algebrico.

In **C** è possibile definire delle relazioni di ordinamento.

Un possibile ordinamento è quello detto lessicografico (o degli elenchi telefonici, dei quali segue la stessa logica).

Dati $z' = a' + i\, b'$ e $z = a + i\, b$, poniamo $z' \le z$ se

$$a' < a \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} a' = a \\ b' \le b \end{cases} .$$

Esercizio : Verificare che la definizione data verifica le proprietà richieste per poter parlare di ordinamento.

Nessuna relazione di ordinamento in C può però essere compatibile con le proprietà delle operazioni, nel senso sopra precisato.

Ragioniamo per assurdo: supponiamo esista una relazione d'ordinamento che verifica tutte le proprietà elencate.

Per essa sarà vera una delle seguenti affermazioni:

$\mathbf{i} \ge 0$ oppure $\mathbf{i} \le 0$.

Supponiamo vera la prima (come accade per la relazione di ordine precedentemente definita). Moltiplicando ambo i membri per i e tenendo conto della proprietà ( * ) che vogliamo sia valida, si trova $-1 \ge 0$.

Questo non è ancora un assurdo: significa solo che l'ordinamento considerato in **C** non induce su **R** l'ordinamento standard.

Moltiplichiamo per **i** ambo i membri e applichiamo ancora la proprietà ( * ) , ottenendo $-i \ge 0$, cioè $i \le 0$. Dunque dovrebbe essere contemporaneamente

$\mathbf{i} \le 0$ e $\mathbf{i} \ge 0$

e questo accade solo se $i = 0$, che è falso.

Se partiamo da $i \le 0$ ( e quindi $-i \ge 0$ ) e procediamo in maniera analoga, arriviamo allo stesso risultato.

Dunque, mentre in **C** si conservano le proprietà algebriche dei numeri reali che sono alla base della teoria delle equazioni, non è invece possibile stabilire una significativa e utile teoria delle disequazioni.

Esercizi di riepilogo

1. Disegnare nel piano complesso le regioni descritte dalle varie condizioni:

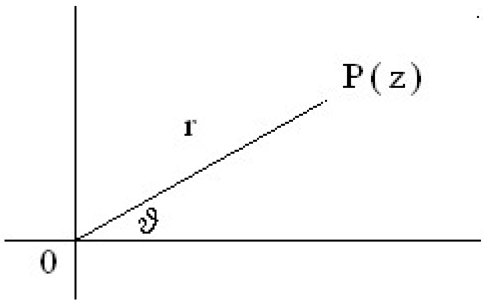
- $\mathrm{Re}\, z \geq -1/2$
- $\mathrm{Re}\, z < \mathrm{Im}\, z$
- $| z | = 1$
- $| z - 3 i | = 3$
- $3 \leq | z - 3 i | \leq 4$

2. Risolvere in campo compleeso

- $z^2 + z + 1 = 0$
- $z^2 - \bar{z} = 1$
- $\left| z^2 + 1 \right| = z - z^2$
- $z^2 = 3 + 4 i$
- $| z | = i - 4 z$
- $\begin{cases} i z - \bar{w} = -1 \\ z^2 + w^2 = -1 \end{cases}$

**Forma trigonometrica ed esponenziale dei numeri complessi**

Accanto alle coordinate cartesiane, nel piano complesso possono essere introdotte le coordinate polari, come illustrato in figura:

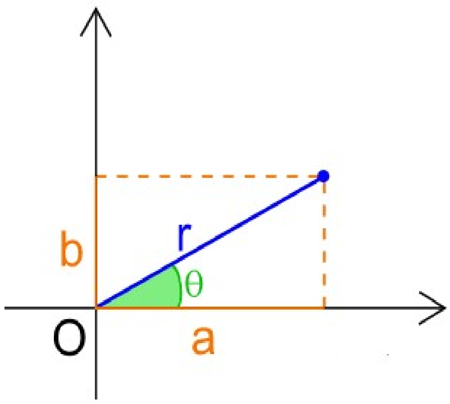



Il punto P (z) resta individuato da due numeri:

- il **modulo** r = | z |
- l'**argomento** $\vartheta$ che indica la misura in radianti dell'angolo che il segmento OP forma con il semiasse positivo delle ascisse; ad ogni numero complesso z ≠ 0 rimangono associati infiniti argomenti, che differiscono tra loro per multipli interi di 2 π. Si chiama **argomento** principale il valore scelto in un intervallo prefissato: comunemente ( - π , π ] oppure [ 0 , 2 π ) .

  Per z = 0 l'argomento non è definito: l'annullarsi del modulo è sufficiente a individuare il numero.

Legame tra le coordinate cartesiane e quelle polari di un numero complesso z ≠ 0.



Se conosciamo le coordinate polari, quelle cartesiane sono:

$$\mathbf{a = r \cos\theta} \qquad\qquad \mathbf{b = r\ sen\,\theta}.$$

Viceversa, se conosciamo le coordinate cartesiane, quelle polari sono:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos\vartheta = a / \sqrt{a^2 + b^2} \qquad sen\,\vartheta = b / \sqrt{a^2 + b^2} \,.$$

Osservazione: talvolta si trova scritto che è $\vartheta$ = arctg ( b/a ) ; il risultato è corretto solo se il punto P = ( a , b ) si trova nel I o nel IV quadrante ( perché la funzione arcotangente assume valori in ( $-\pi/2$ , $\pi/2$ ) ) .

Più precisamente si ha:

| | |
|---|---|
| $\vartheta$ = arctg ( b/a ) | se a > 0 |
| $\vartheta$ = arctg ( b/a ) + $\pi$ | se a < 0 |
| $\vartheta = \pi / 2$ | se a = 0 , b > 0 |
| $\vartheta = 3\pi / 2$ | se a = 0 , b < 0 . |

Si ha dunque

$$\mathbf{a + i\,b = r\,(\cos\vartheta + i\ sen\,\vartheta).}$$

Il secondo membro di questa uguaglianza prende il nome di **forma trigonometrica** o polare del numero complesso.

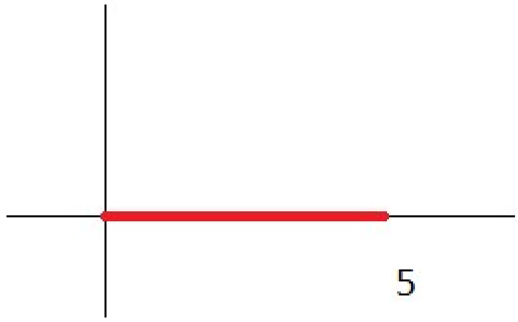
Per motivi che saranno chiariti più avanti, poniamo:

$$\mathbf{e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\,sen\,\vartheta\ ;}$$

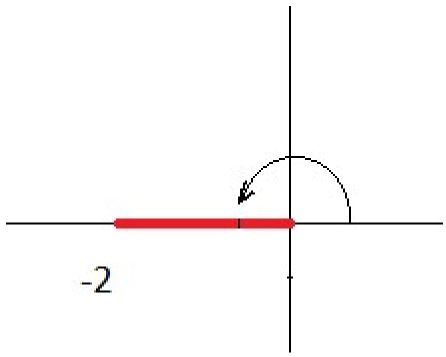
in tal modo si ottiene la **rappresentazione esponenziale** del numero complesso:

$$\mathbf{z = r^{i\vartheta}}\ .$$

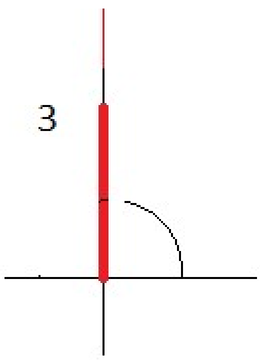
Esempi



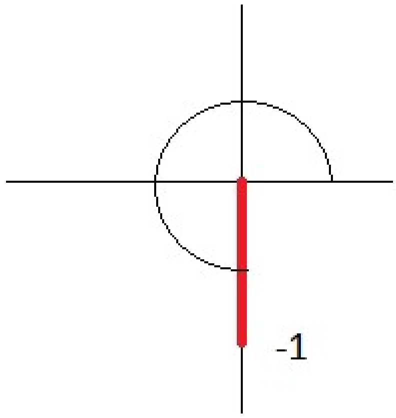

$$5 = 5(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 5e^{i0}$$



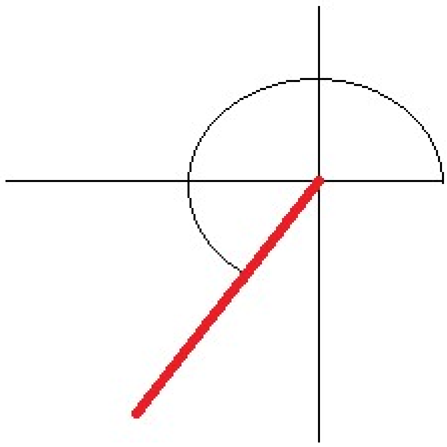

$$-2 = 2(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) = 2e^{i\pi}$$



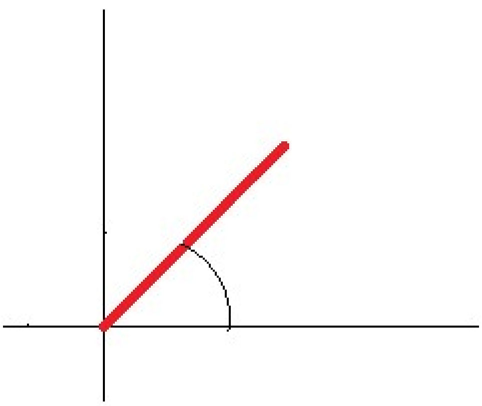

$$3i = 3(\cos \pi/2 + i \operatorname{sen} \pi/2) = 3e^{i\pi/2}$$




$- i = \cos(-\pi/2) + i \operatorname{sen}(-\pi/2) = e^{-i\pi}$



$- 1 - \sqrt{3}\, i = 2(\cos 4\pi/3 + i \operatorname{sen} 4\pi/3) = 2e^{4\pi i/3}$



$1 + i = \sqrt{2}\,(\cos(\pi/4) + i \operatorname{sen}(\pi/4)) = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

Due numeri complessi scritti in forma trigonometrica

$$z = r\,(\cos\vartheta + i\,\text{sen}\,\vartheta) \qquad w = \rho\,(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)$$

o esponenziale

$$z = r\,e^{i\vartheta} \qquad w = \rho\,e^{i\varphi}$$

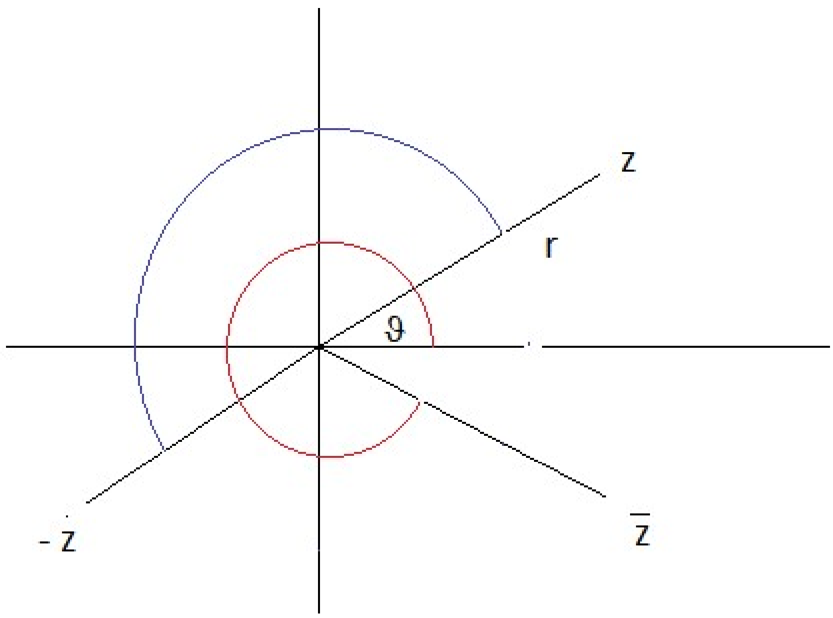
sono uguali se e solo se hanno lo stesso modulo e argomenti che differiscono per un multiplo intero di $2\pi$ :

$$r = \rho \qquad \vartheta = \varphi + 2k\pi\,,\ k \in \mathbf{Z}\,.$$

Due numeri complessi coniugati hanno lo stesso modulo e argomenti opposti; due numeri complessi opposti hanno lo stesso modulo e argomenti principali che differiscono di $\pi$

$$\bar{z} = r\,e^{-i\vartheta}$$

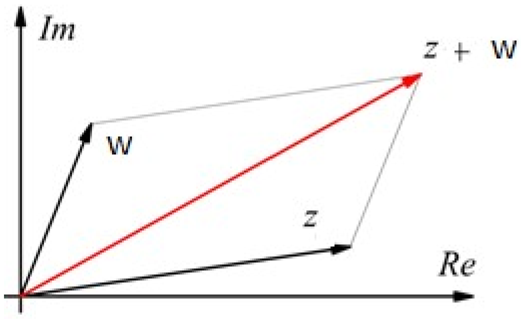
$$-z = r\,e^{i(\vartheta+\pi)}$$



**Interpretazione geometrica delle operazioni in campo complesso.**

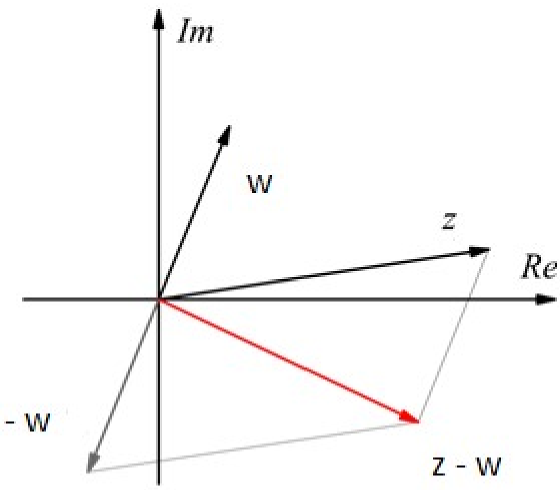
- **Somma**

  Abbiamo già visto che vale la regola del parallelogramma: il punto P ( z + w ) è il quarto vertice del parallelogramma i cui altri vertici sono O, P ( z ) , P ( w ); il segmento di estremi O e P ( z + w ) è dunque una diagonale di tale parallelogramma.




- **Differenza**

  Poiché z - w = z + ( - w ) e P ( - w ) è il simmetrico di P ( w ) rispetto all'origine, il segmento di estremi O e P ( z – w ) è parallelo alla seconda diagonale del parallelogramma.




-

**Prodotto**

Eseguendo il prodotto di due numeri complessi scritti in forma trigonometrica:

$z = r\ (\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta) \qquad w = \rho\ (\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$,

si ottiene

$r\ \rho\ [(\cos\vartheta\ \cos\varphi - \operatorname{sen}\vartheta\ \operatorname{sen}\varphi) + i\ (\operatorname{sen}\vartheta\ \cos\varphi + \cos\vartheta\ \operatorname{sen}\varphi)]$

$= r\rho\,[\cos(\vartheta + \varphi) + i \operatorname{sen}(\vartheta + \varphi)]$ .

Dunque:

<u>il modulo del prodotto è il prodotto dei moduli</u>

<u>l'argomento del prodotto è la somma degli argomenti</u>

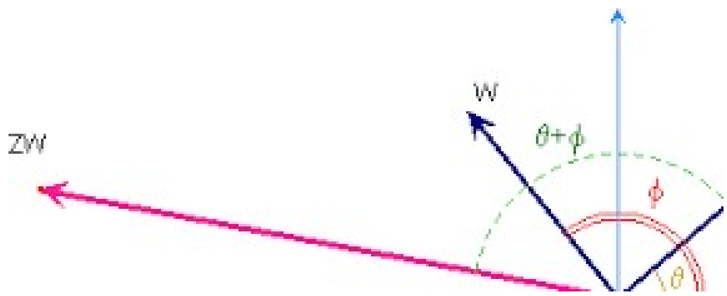
$|zw| = |z|\ |w| \qquad \arg(zw) = \arg z + \arg w$.

In forma esponenziale:

$$r e^{i\vartheta}\ \rho e^{i\phi} = r\rho\ e^{i(\vartheta+\phi)} \ .$$

Dal punto di vista geometrico, il segmento di estremi O, P (z) viene ruotato in senso antiorario di un angolo pari a $\varphi$ e allungato o accorciato (a seconda che sia $\rho$ maggiore o minore di 1).

Dunque il prodotto di due numeri complessi si interpreta geometricamente come la composizione di una rotazione con una omotetia.




Osservazione

In particolare abbiamo ottenuto

$$e^{i\vartheta}\ e^{i\phi} = e^{i(\vartheta+\phi)}$$

che è una relazione analoga a quella valida per l'esponenziale reale (l'esponenziale di una somma è il prodotto degli esponenziali); questo risultato giustifica perché all'espressione cos $\vartheta$ + i sen $\vartheta$ è stato dato il nome di esponenziale.

- **Inversione**

Poiché

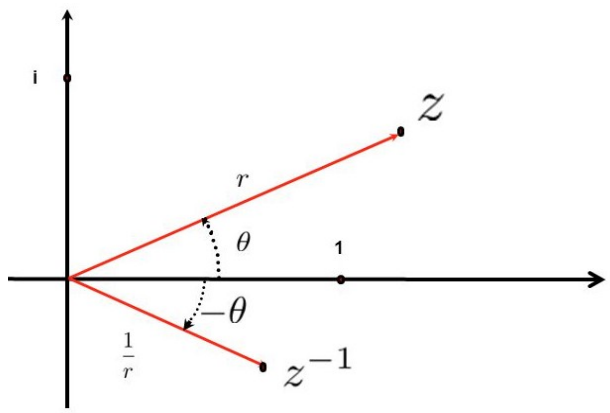
$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\,\bar{z}} = \frac{r}{r^2}\,e^{-i\vartheta} = \frac{1}{r}\,e^{-i\vartheta}\ ,$$

si interpreta il risultato scrivendo:

<u>il modulo dell'inverso è l'inverso del modulo</u>

<u>l'argomento dell'inverso è l'opposto dell'argomento.</u>

$|\,1/z\,| = 1/|\,z\,|$ , $\arg(1/z) = -\arg z$.




- **Divisione**

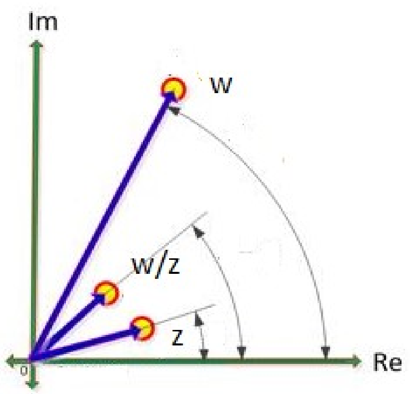
Poiché

$$\frac{w}{z} = \frac{w\,\bar{z}}{z\,\bar{z}} = \frac{\rho\, e^{i\varphi}\ \ r\, e^{i\vartheta}}{r^2} = \frac{\rho}{r} e^{i(\varphi-\vartheta)} \ ,$$

<u>il modulo del rapporto è il rapporto dei moduli</u>

<u>l'argomento del rapporto è la differenza degli argomenti</u>

| w / z |  =  | w | / | z |  ,  arg (w / z)  =  arg w - arg z.



Esempi

Riscriviamo i numeri complessi

$z = 1 + i \quad , \quad w = \sqrt{3} - i$

in forma esponenziale:

$z = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4} \quad , \quad w = 2\, e^{-i\pi/6}.$

Si ha dunque:

$$zw = 2\sqrt{2}\, e^{i\pi/12} \qquad z/w = (1/\sqrt{2})\, e^{i5\pi/12}$$

$$z^4 = 4\, e^{i\pi} = -4 \qquad \overline{w}^{\,3} = 8\, e^{i\pi/2} = 8i$$

$$1/w = (1/2)\, e^{i\pi/6} = (\sqrt{3} + i)/4.$$

Esercizi

Risolvere in campo complesso:

- $z^2 = 3 + 4\,i$
- $|z|\,z + \bar{z}^3 = 0$
- $z^2 = -\bar{z}^4$
- $z^3 = (1+i)\,\bar{z}$
- $\begin{cases} z^2 + w\,|z| = 0 \\ w^2 - z\,|w| = 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} z + w\,\bar{z} = |z| \\ \bar{z} + w\,z = 1 \end{cases}$
- $(z^2 - \bar{z}^2)\,|z^2 - 1| = 0$ .

**Un semplice problema di geometria risolto con i numeri complessi**

Dato nel piano cartesiano il punto P = (x, y), vogliamo trovare le coordinate del punto P' = (x', y') ottenuto da P con una rotazione attorno all'origine di un angolo $\alpha$ in senso antiorario.

Possiamo risolvere facilmente questo problema geometrico trasformandolo in uno sui numeri complessi: associamo ai punti P e P ' i numeri

$$z = x + i\,y \quad e \quad z' = x' + i\,y'$$

rispettivamente e traduciamo la rotazione nel prodotto per il numero

$$w = \exp(i\,\alpha) = \cos\alpha + i\ \mathrm{sen}\,\alpha\ ;$$

in altre parole, deve risultare $z' = w\,z$ , cioè

$$x' = x\cos\alpha - y\ \mathrm{sen}\,\alpha\ , \quad y' = x\ \mathrm{sen}\,\alpha + y\cos\alpha\ .$$

Queste diventano le equazioni della rotazione.

Ad esempio, nella rotazione con $\alpha = 60° = \pi / 3$ il punto P = (- 1, 1) si sposta nel punto P ' = ( (- 1 - √ 3) / 2 , (1 - √ 3) / 2 ).

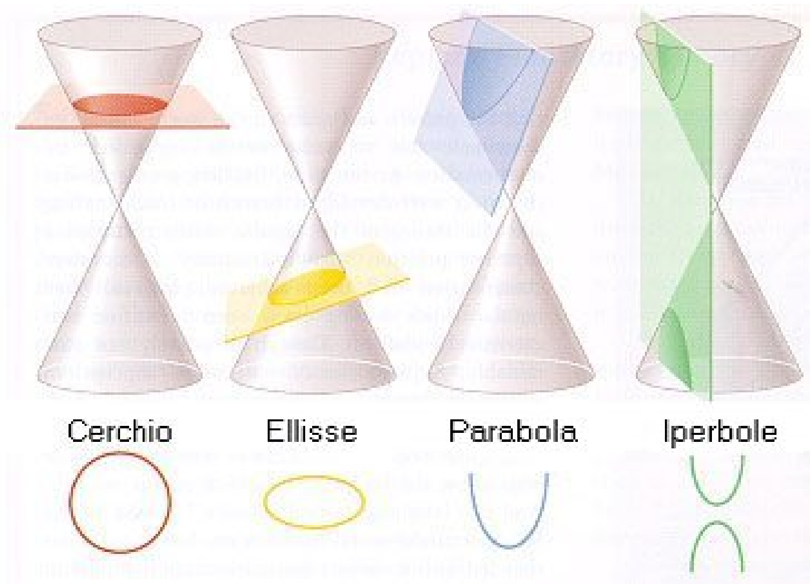
Le equazioni inverse si deducono in modo immediato, osservato che si passa da P' a P con la rotazione inversa, cioè sostituendo $\alpha$ con $-\alpha$ :

$$x = x'\cos\alpha + y'\ \mathrm{sen}\,\alpha\ , \quad y = -x'\ \mathrm{sen}\,\alpha + y'\cos\alpha\ .\ (*)$$

Esercizio : coniche

Consideriamo due rette r ed a che si intersecano in un punto P e ruotiamo r attorno ad a ; la superficie così ottenuta si dice cono circolare ( r è la retta generatrice del cono, a è l'asse, P il vertice ) . Il termine corretto per tale superficie è cono circolare a due falde.

Le sezioni di un cono con un piano sono curve dette coniche; a parte alcuni casi degeneri, si ottengono :




Le coniche si rappresentano con un'equazione quadratica, cioè della forma

$$A x^2 + B y^2 + C xy + D x + E y + F = 0.$$

L'equazione $5 x^2 + 5 y^2 - 6 x y = 1$ definisce dunque una conica; il fatto che manchino i termini di primo grado in x e y significa che la curva ha l'origine come centro di simmetria; si tratta dunque di un'ellisse o un'iperbole (si vede subito che non è una circonferenza ) . La presenza del termine in xy dipende dal fatto che gli assi di simmetria della curva non coincidono con quelli del riferimento cartesiano. Per capire di quale tipo di conica si tratta facciamo una rotazione di un angolo arbitrario $\alpha$ : l'equazione della curva ruotata, si ottiene sostituendo le ( * ) nell'equazione di partenza. Il termine x' y' ha come coefficiente cos $2\alpha$. Se prendiamo $\alpha = \pi/4$, questo coefficiente si annulla (ovviamente $\pi/4$ non è l'unica possibile scelta) e nell'equazione rimangono soltanto i termini in $x'^2$ e $y'^2$ : $4 x'^2 + y'^2 = ½$ , che è l'equazione di un'ellisse.

Gli studenti eseguano i calcoli sopra indicati.

**Formula di de Moivre**

Iterando la moltiplicazione, si trova

$$( e^{i \vartheta} )^n = e^{i n \vartheta} \quad \text{cioè} \quad ( \cos\vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta )^n = \cos n\vartheta + i \operatorname{sen} n\vartheta.$$

E' facile vedere che l'uguaglianza vale anche sostituendo n con –n.

Inoltre è ovvia per n = 0.

In conclusione vale per ogni n intero.

Un'applicazione della formula di de Moivre ( formule di triplicazione )

Per n = 3, si ottiene

$$( e^{i \vartheta} )^3 = e^{i 3 \vartheta} \quad \text{cioè} \quad ( \cos\vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta )^3 = \cos 3\vartheta + i \operatorname{sen} 3\vartheta.$$

Ma

$$( \cos\vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta )^3 = \cos^3\vartheta + 3 \cos^2\vartheta \, i \operatorname{sen}\vartheta + 3 \cos\vartheta \, i^2 \operatorname{sen}^2\vartheta + i^3 \operatorname{sen}^3\vartheta =$$

$$= ( \cos^3\vartheta - 3 \cos\vartheta \operatorname{sen}^2\vartheta ) + i ( 3 \cos^2\vartheta \operatorname{sen}\vartheta - \operatorname{sen}^3\vartheta ).$$

Da cui:

$$\cos 3\vartheta = \cos^3\vartheta - 3 \cos\vartheta \operatorname{sen}^2\vartheta = 4 \cos^3\vartheta - 3 \cos\vartheta$$

$$\operatorname{sen} 3\vartheta = 3 \cos^2\vartheta \operatorname{sen}\vartheta - \operatorname{sen}^3\vartheta = 3 \operatorname{sen}\vartheta – 4 \operatorname{sen}^3\vartheta .$$

**Radici n-esime in campo complesso**

Dato un numero complesso non nullo

$$w = \rho \, e^{i \varphi}$$

le sue radici n-esime sono le soluzioni dell'equazione

$$z^n = w \; .$$

Ovviamente se w = 0, l'unica soluzione di questa equazione è 0.

Scritta l'incognita z nella forma esponenziale

$$z = r \, e^{i \vartheta} \; ,$$

deve risultare

$$r^n e^{i n \vartheta} = \rho \, e^{i \varphi} \; ;$$

questo avviene se

$$\begin{cases} r^n = \rho \\ n \vartheta = \varphi + 2 k \pi \qquad \text{con } k \in Z \end{cases}$$

ovvero se

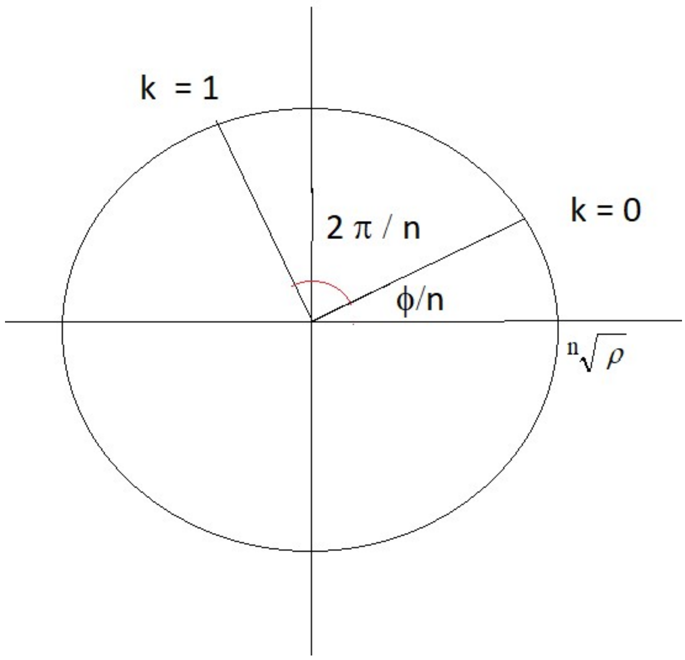
$$r = \sqrt[n]{\rho}$$

$$\vartheta = \frac{\varphi + 2 k \pi}{n} \qquad \text{con } k \in \mathbf{Z}.$$

In forma esponenziale le soluzioni sono date da :

$$z = \sqrt[n]{\rho} \;\; \exp\left( i \; \frac{\varphi + 2 k \pi}{n} \right) \quad , \text{ con } k \in \mathbf{Z} \, .$$

Dal punto di vista geometrico, il fatto che le soluzioni abbiano tutte lo stesso modulo significa che stanno sulla stessa circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{\rho}$ . La soluzione con k = 0 ha argomento $\varphi$ / n; ogni volta che si incrementa di una unità il valore di k, l'argomento aumenta sempre dello stesso valore, che corrisponde all'n-esima parte dell'angolo giro. Questo significa che ad ogni passo il vettore associato alla soluzione ruota sempre di questo angolo e dunque dopo n passi ritorna al punto di partenza. Analogamente se diamo a k valori negativi; l'unica cosa che cambia è il verso della rotazione. Questo prova che , per ottenere tutte le soluzioni dell'equazione, non serve dare a k tutti i valori interi: basta sceglierne n consecutivi, ad esempio k = 0, 1 , 2 , …. , n – 1. Dal punto di vista geometrico si interpreta il risultato dicendo che le soluzioni formano i vertici un poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza.

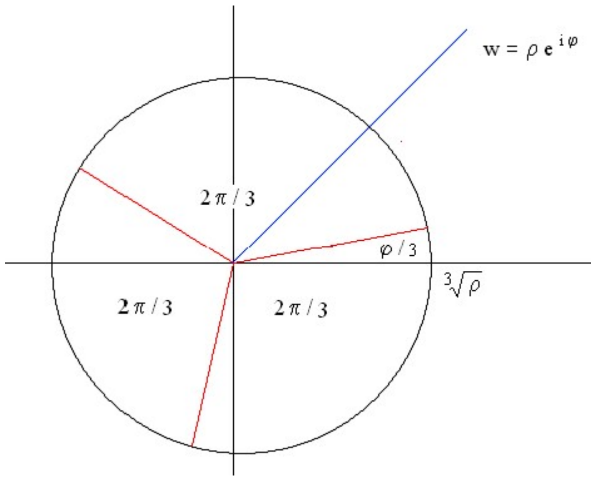



Per n = 2, le due soluzioni sono una opposta all'altra: nel caso particolare che w sia un reale positivo, le radici quadrate di w sono $\pm \sqrt{w}$, quelle di - w sono $\pm i \sqrt{-w}$.

Nel caso **w reale positivo** si presti attenzione a non confondere le radici quadrate in campo complesso (che sono **entrambe** le soluzioni dell'equazione $z^2 = w$) con la radice quadrata in campo reale (che di questa equazione è soltanto **la soluzione positiva** ; a questo proposito si parla anche di radice aritmetica).

La figura successiva mostra la posizione delle tre radici cubiche del numero complesso w.

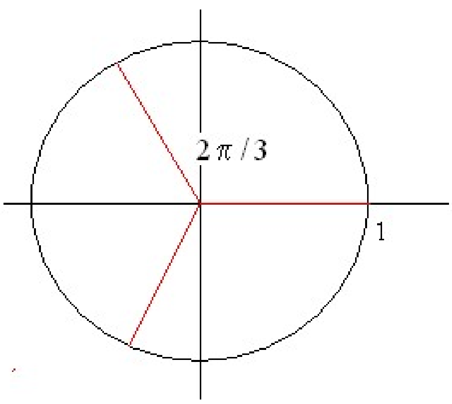
Le radici stanno sulla circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[3]{\rho}$ (essendo $\rho = |w|$). L'argomento della prima si trova dividendo per 3 l'argomento principale di w. Le altre due si trovano ruotando in senso antiorario il vettore così individuato, rispettivamente una o due volte di un angolo pari ad un terzo di angolo giro (cioè di $120^0$ e di $240^0$ gradi).




Esempi

**1.** Trovare le radici terze di 1.

In campo reale l'unica radice è 1; a partire da questa è facile costruire le altre soluzioni: basta disegnare il triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di raggio unitario, sapendo che uno dei vertici è il punto (1, 0).



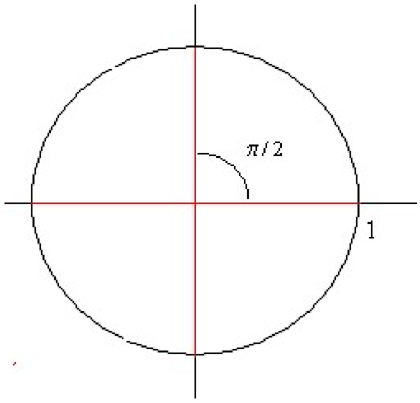

Troviamo in tal modo i numeri:

$$z_1 = 1 \ , \quad z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \ , \quad z_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

Per esercizio, ritrovare queste soluzioni a partire dal risultato generale.

**2.** Trovare le radici quarte di 1.

Anche in questo caso si parte dalle due radici reali ± 1 e si trovano le altre due con considerazioni geometriche.




Le soluzioni sono:

$$z_1 = 1 \ , \quad z_2 = i \ , \quad z_3 = -1 \ , \quad z_4 = -i$$

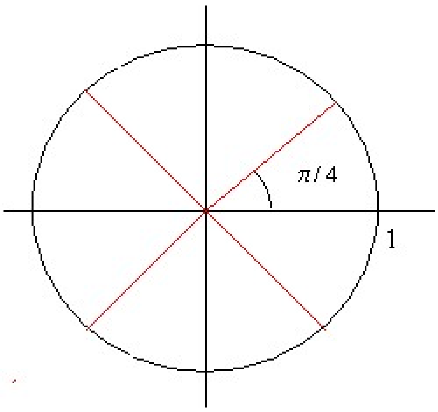
**3.** Trovare le radici quarte di - 1.

Scritto il numero -1 nella forma esponenziale 1 exp ( i π ), le radici sono date da

$$\exp\left( i \left( \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \right) \right) , \quad k = 0, 1, 2, 3$$

ovvero, in forma algebrica:

$$z_{0,3} = \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}} \quad , \quad z_{1,2} = \frac{-1 \pm i}{\sqrt{2}} \; .$$




**4.** Trovare le radici quadrate di - 3 + 4 i.

Scriviamo il numero - 3 + 4 i nella forma esponenziale 5 exp ( i $\varphi$ ), dove $\varphi \in (\pi / 2, \pi)$ è tale che cos $\varphi$ = - 3 / 5 , sen $\varphi$ = 4 / 5.

Le radici cercate hanno la forma

$$\sqrt{5} \exp \left( i \left( \varphi / 2 + k \pi \right) \right) , \text{ k = 0, 1}$$

e dunque sono date da

$$\pm \sqrt{5} \; ( \cos \frac{\varphi}{2} + i \; \text{sen} \; \frac{\varphi}{2} ) \; .$$

Tenendo conto che $\varphi / 2 \in (\pi / 4, \pi / 2)$ e utilizzando le formule di bisezione, si trova

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{sen} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

e dunque

$z = \pm(1 + 2\,i)$.

Un metodo alternativo consiste nello scrivere l'incognita z nella forma algebrica x + i y; imponendo che il suo quadrato sia -3 + 4 i, si trova:

$$x^2 - y^2 + 2\,i\,x\,y = -3 + 4\,i$$

cioè

$$(*) \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ x\,y = 2 \end{cases}$$

da cui si ottiene:

$$\begin{cases} y = 2/x \\ x^4 + 3x^2 - 4 = 0 \end{cases}.$$

L'equazione in x fornisce $x^2 = -4$ (che non ha soluzioni; si ricordi infatti che x è un'incognita reale) oppure $x^2 = 1$ (e dunque $x = \pm 1$ ).

Le soluzioni sono $z = \pm(1 + 2\,i)$.

**5.** Risolvere l'equazione $x^2 - 2\,i\,x + 3 = 0$.

La formula risolutiva delle equazioni di secondo grado è la stessa sia in campo reale che in campo complesso; dunque:

$$x = i + \sqrt{-4} = i \pm 2\,i = 3i \text{ oppure } -i$$

**Teorema fondamentale dell'algebra e scomposizione di polinomi**

Sia P (x) un polinomio di grado n, a coefficienti complessi:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 .$$

Se S (x) è un secondo polinomio di grado minore o uguale a quello di P (x), diciamo che P (x) è divisibile per S (x) se il resto della divisione di P per S è nullo, cioè se esiste un polinomio Q (x) tale che

$$P(x) = Q(x)\, S(x) \quad , \quad \forall\, x \in \mathbf{R}.$$

Di particolare importanza è il seguente teorema:

**Teorema** di Ruffini

P (x) è divisibile per $x - \alpha$ $\Leftrightarrow$ $P(\alpha) = 0$ , cioè $\alpha$ è una radice del polinomio

dimostrazione

Dividendo P (x) per $x - \alpha$ si trova come quoziente un polinomio Q (x) di grado $n - 1$ e come resto un numero r tali che

$$P(x) = Q(x)\,(x - \alpha) + r.$$

Affermare che P (x) è divisibile per $x - \alpha$ equivale ad affermare che il resto r è nullo; è evidente che questo accade se e solo se $P(\alpha) = 0$.

☑

Il teorema di Ruffini stabilisce un legame tra la scomposizione di un polinomio in fattori primi ed il problema della determinazione delle sue radici.

Se P (x) ha una radice $\alpha_1$, possiamo scrivere

$$P(x) = (x - \alpha_1)\, Q(x).$$

dove Q (x) è un polinomio di grado n – 1; se anche Q (x) ha una radice $\alpha_2$, possiamo ulteriormente scrivere:

$$P(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)S(x)$$

dove S (x) è un polinomio di grado n - 2.

Ripetendo questo procedimento per i successivi quozienti, si arriva a scomporre il polinomio P (x) nel prodotto di n polinomi di primo grado:

$$P(x) = c\ (x-\alpha_1)\ ....(x-\alpha_n)$$

(la costante c è il coefficiente della potenza di grado massimo in P (x), cioè $a_n$).

Parleremo a questo proposito di scomposizione del polinomio in fattori primi, cioè non ulteriormente scomponibili.

Nel caso che le n radici non siano tutte distinte, possiamo raggruppare i termini uguali e scrivere

$$P(x) = c\ (x-\beta_1)^{m1}(x-\beta_2)^{m2}\ ....\ (x-\beta_r)^{mr}$$

dove

$\beta_1, ...., \beta_r$ sono le radici distinte del polinomio

$m_1, ..., m_r$ le rispettive molteplicità.

Dunque, dire che $\beta_i$ è una radice di molteplicità $m_i$ equivale a dire che il polinomio è divisibile per $(x - \beta_i)^{m_i}$, ma non per $(x - \beta_i)^{m_i+1}$. Una radice con molteplicità 1 si dice semplice.

La scomposizione ottenuta richiede l'esistenza di una radice per P (x) e per i polinomi che intervengono come successivi quozienti. Abbiamo però visto che in campo reale esistono polinomi privi di radici: è solo allargando il campo numerico da quello reale a quello complesso che l'esistenza delle radici è assicurata e quindi la scomposizione diventa sempre possibile, come è asserito dal seguente teorema:

**Teorema** fondamentale dell'algebra (di d'Alembert)

Ogni polinomio di grado $n \geq 1$ a coefficienti complessi ammette almeno una radice in campo complesso.

Applicando il teorema di Ruffini, possiamo precisare che il polinomio ammette esattamente n radici , se queste sono contate con la loro molteplicità).

Ogni polinomio a coefficienti complessi può dunque essere scomposto in fattori irriducibili in campo complesso, della forma $x - \alpha$.

Questo risultato vale come caso particolare anche per i polinomi **a coefficienti reali**: il fatto che i coefficienti siano reali, però, non ci autorizza a pensare che anche i fattori primi lo siano. Così ad esempio, il polinomio reale $x^2 + 1$ si scompone nella forma $(x - i)(x + i)$.

Per i polinomi a coefficienti reali vale però il seguente risultato:

- Se $\alpha$ è una radice complessa di un polinomio a coefficienti reali, anche $\overline{\alpha}$ lo è.

dimostrazione

Utilizzando le proprietà del coniugato di un numero complesso e ricordando che i coefficienti del polinomio sono reali, si ottiene $P(\overline{\alpha}) = \overline{P(\alpha)} = 0$.

Infatti:

$$P(\overline{\alpha}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{\alpha}^k = \sum_{k=0}^{n} \overline{a}_k \overline{\alpha}^k = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k \alpha^k} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k} = \overline{P(\alpha)}$$

☑

Pertanto se nella scomposizione di un polinomio a coefficienti reali compare il fattore $x - \alpha$, deve comparire anche il fattore $x - \overline{\alpha}$.

Posto $\alpha = a + i\,b$, risulta

$$(x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) = (x-a)^2 + b^2$$

che è un polinomio di secondo grado a coefficienti reali, non scomponibile in campo reale (cioè con discriminante $\Delta$ di segno negativo).

Dunque, un polinomio P (x) a coefficienti reali ammette due diverse scomposizioni in fattori primi che sono:

- polinomi di primo grado a coefficienti complessi
- polinomi a coefficienti reali di primo grado e/o di secondo grado a discriminante negativo.

La prima è la scomposizione in campo complesso, la seconda in campo reale.

Esempi

**1.** $\mathbf{x^2 - 1}$

Poiché le radici $\pm 1$ del polinomio sono entrambe reali, la scomposizione in campo complesso e quella in campo reale coincidono e sono (x – 1) (x + 1).

**2.** $\mathbf{x^3 - 1}$

Le tre radici del polinomio sono $1$ , $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ e dunque la scomposizione in campo complesso è

$$(x-1)\left(x - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right).$$

In campo reale questa scomposizione diventa:

$$(x-1)\ ((x+½)^2 + ¾) = (x-1)\ (x^2+x+1).$$

**3.** $\mathbf{x^4 - 1}$

Le radici del polinomio sono $\pm 1$, $\pm i$ e dunque la scomposizione in campo complesso è data da

$$(x - 1)(x + 1)(x - i)(x + i).$$

In campo reale questa scomposizione diventa:

$$(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) \ .$$

**4.** $\mathbf{x^4 + 1}$

A partire dalle radici $\dfrac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$ , $\dfrac{-1 \pm i}{\sqrt{2}}$ si trova la scomposizione

$$\left( x - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right)\left( x - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\left( x + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right)\left( x + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right)$$

In campo reale questa scomposizione diventa:

$$\left( \left( x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{1}{2} \right)\left( \left( x + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{1}{2} \right) =$$

$$= (x^2 - \sqrt{2}\,x + 1)\ (x^2 + \sqrt{2}\,x + 1) \ .$$

**5.** $\mathbf{x^2 + x + 1}$

Le radici del polinomio sono $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. La scomposizione in campo complesso è data da

$$\left( x - \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right)\left( x - \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right)$$

In campo reale il polinomio è già scritto in forma irriducibile.

**6.** $\mathbf{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}$

Una radice è 1.

Dividendo per $x - 1$, si ottiene

$x^3 - x^2 + x - 1 = x^2 ( x - 1 ) + ( x - 1 ) = ( x - 1 ) ( x^2 + 1 )$.

In definitiva dunque il polinomio si scompone in campo reale nella forma $( x - 1 )^2 ( x^2 + 1 )$.

In campo complesso la scomposizione diventa $( x - 1 )^2 ( x - i ) ( x + i )$.

In particolare, il polinomio ha la radice reale 1 che è doppia e le radici complesse coniugate $\pm i$.