Integrali impropri o generalizzati

L'integrale di Riemann richiede necessariamente che la funzione f sia:

- **definita in un intervallo limitato**
- **limitata in tale intervallo.**

(non abbiamo specificato che l'intervallo sia anche chiuso, perché quello che accade agli estremi dell'intervallo è ininfluente ai fini dell'integrazione; infatti si può sempre modificare il valore della funzione in un numero finito di punti senza che l'integrale ne risenta).

La teoria degli integrali impropri o generalizzati cerca di rimuovere queste limitazioni. Come vedremo, questo obiettivo non sempre si può realizzare.

Dal punto di vista geometrico questo estensione del concetto di integrale permette la possibilità di attribuire un'area o un volume anche a regioni del piano o dello spazio che non sono limitate.

L'integrale $\int_a^b f(x)\, dx$ si dice **improprio** se

- almeno uno dei due estremi di integrazione non è finito
- la funzione non è limitata nell'intorno di un numero finito di punti
- si presentano entrambe le situazioni.

Un integrale improprio si dice **elementare** se è improprio per **un solo** motivo e questo è dovuto ad un estremo. Come vedremo, ogni altro integrale improprio si riconduce ad un numero finito di integrali elementari.

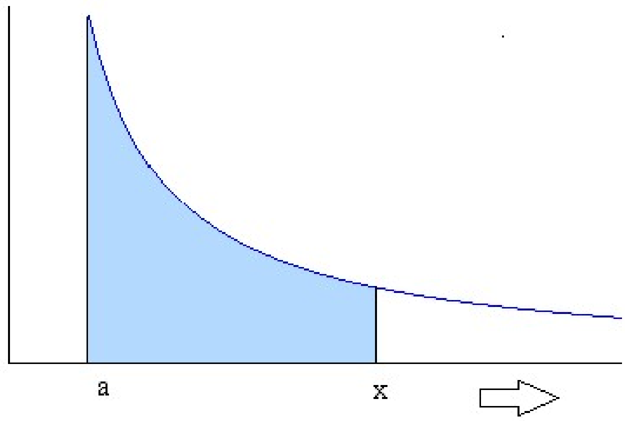
Integrali impropri su intervalli non limitati

(i)

Sia f una funzione definita in [a , +∞) , integrabile in ogni intervallo [a , x] (ad esempio, una funzione continua o generalmente continua) .

Se esiste

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\, dt = L \in R ,$$



diciamo che f è integrabile in senso improprio in [a , + ∞) e poniamo

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = L .$$

Nella pratica, indicata con g (x) una primitiva della funzione, dobbiamo calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) - g(a).$$

Più semplicemente, ma con lo stesso significato, possiamo scrivere $\left[g(x) \right]_a^{+\infty}$

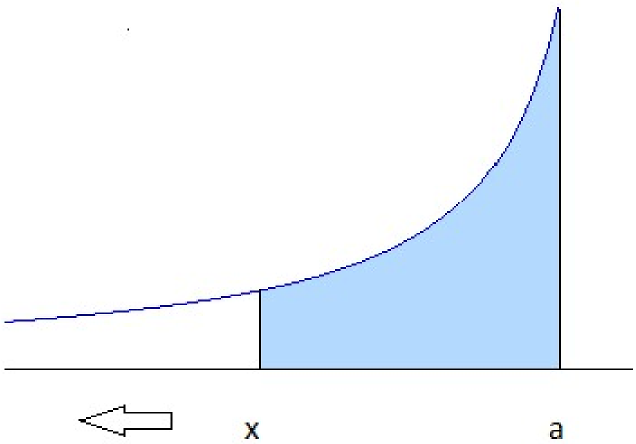
Nel caso di funzione positiva, l'esistenza dell'integrale permette di assegnare un'area al trapezoide corrispondente, che non è una regione limitata del piano. Questo tipo di osservazione si può ripetere anche negli altri casi che vedremo di seguito.

(i i)

Sia f una funzione definita in (-∞ , a] , integrabile in ogni intervallo [x , a].

Se esiste

$$\lim_{x \to -\infty} \int_x^a f(t)\, dt = L \in R ,$$



diciamo che f è integrabile in senso improprio in (-∞ , a] e poniamo

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx = L$$

Possiamo sintetizzare quanto detto, scrivendo: $\left[g(x) \right]_{-\infty}^{a}$ dove g (x) al solito indica una primitiva della funzione.

(i i i)

Sia f una funzione definita in **R** , integrabile in ogni intervallo limitato.

Fissato arbitrariamente c ∈ **R** , diciamo che f è integrabile in senso improprio in **R** se lo è in (- ∞ , c) e in (c , + ∞) . In tal caso poniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\, dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\, dx .$$

L'esistenza dell'integrale e, in caso affermativo, il suo valore, non dipendono dalla scelta del punto c.

Osservare come abbiamo ricondotto questo tipo di integrale a due integrali elementari.

Osservazione

- E' sbagliato scrivere $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = 0$ pur essendo l'integrale di una funzione dispari.

Perché è sbagliato ?

- E' sbagliato scrivere $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = \lim_{x\to+\infty} \left[t^2/2 \right]_{-x}^{x} = 0$.

Perché è sbagliato ?

- Qual è allora il modo corretto per studiare questo integrale ?

Esempi

1. $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} \quad (\alpha > 0)$

$$\int \frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-\alpha)\, x^{\alpha-1}} + c & \text{se } \alpha \neq 1 \\ \log|x| & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\int_{1}^{x} \frac{dt}{t^{\alpha}} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\left(\dfrac{1}{x^{\alpha-1}} - 1 \right) & \text{se } \alpha \neq 1 \\ \log|x| & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{1}^{x} \frac{dt}{t^{\alpha}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases} .$$

Dunque, l'integrale esiste (in senso improprio) **solo per $\alpha > 1$ (ordine di infinitesimo alto)**

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x \exp(-x^2)\, dx$

$$\int x \exp(-x^2)\, dx = -\exp(-x^2)/2 + c$$

$$\Big[-\exp(-x^2)/2 \Big]_0^{+\infty} = 1/2$$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\operatorname{sen}^2 x}$

Ponendo t = tgx :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\operatorname{sen}^2 x} + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{1+\operatorname{sen}^2 x} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+2t^2} + \int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{1+2t^2} =$$

$$\left[\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{2}\, t}{\sqrt{2}}\right]_0^{+\infty} + \left[\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{2}\, t}{\sqrt{2}}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+e^x}$

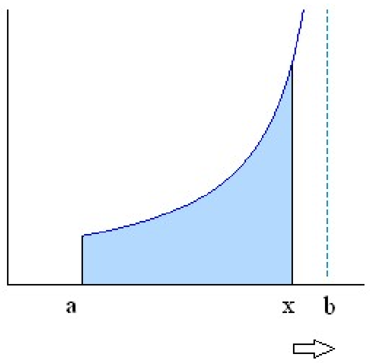
Ponendo $e^x = t$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t)} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right) dt = \left[\log\left|\frac{t}{1+t}\right|\right]_1^{+\infty} = \log 2$$

Integrali di funzioni non limitate nell'intorno di un numero finito di punti

(i)

Sia f una funzione definita in [a , b) non limitata nell'intorno di b , integrabile in ogni intervallo [a , x] $\forall$ x $\in$ (a , b) .



Se esiste

$$\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\, dt = L \in R ,$$

diciamo che f è integrabile in senso improprio in [a , b] e poniamo

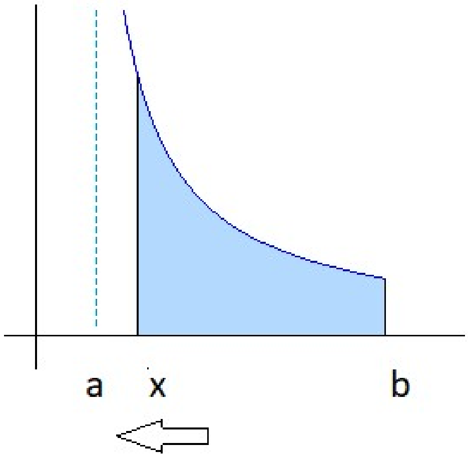
$$\int_a^b f(x)\, dx = L .$$

In pratica si calcola $\left[g(x) \right]_a^{b^*}$ (l'asterisco è stato aggiunto per ricordare che si deve calcolare il limite della primitiva per x → b e non il valore per x = b; nella pratica viene omesso).

La definizione data richiede dunque che la funzione F (x) definita da $\int_a^x f(t)\, dt$ e detta funzione integrale di primo estremo a abbia in x = b una discontinuità eliminabile.

(i i)

Sia f una funzione definita in (a , b] non limitata nell'intorno di a , integrabile in ogni intervallo [x , a] per ogni x $\in$ (a , b) .



Se esiste

$$\lim_{x \to a} \int_x^b f(t)\, dt = L \in R \ ,$$

diciamo che f è integrabile in senso improprio in [a , b] e poniamo

$$\int_a^b f(x)\, dx = L \ .$$

In pratica si calcola $[g(x)]_{a^*}^{b}$ (l'asterisco indica che si deve calcolare il limite della primitiva per x → a) .

La definizione data richiede dunque che la funzione integrale F (x) di secondo estremo b abbia in x = a una discontinuità eliminabile.

(i i i)

Sia f una funzione definita in [a , b] non limitata nell'intorno di un punto interno c. Se f è integrabile in senso improprio in [a , c) e in (c , b] , diciamo che è integrabile in senso improprio in [a , b] e poniamo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \;.$$

In questo modo riconduciamo l'integrale ai due integrali elementari visti precedentemente.

La definizione data richiede dunque che la funzione integrale F (x) di primo estremo a e quella di secondo estremo b abbianoi in x = c una discontinuità eliminabile.

(i v)

Se f definita in [a , b] non è limitata nell'intorno di più punti, si divide l'intervallo in sottointervalli in modo che in ciascuno di essi la funzione non sia limitata in uno solo degli estremi. Diciamo che f è integrabile in senso improprio se lo è in **ciascuno** dei suddetti intervalli secondo le definizioni sopra date; in tal caso, l'integrale in [a , b] è la somma degli integrali nei vari intervalli. Anche in questo caso abbiamo dunque ricondotto un integrale improprio a integrali elementari.

Esempi

1. $$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}} \quad (\alpha > 0)$$

$$\int \frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-\alpha)\,x^{\alpha-1}} + c & \text{se } \alpha \neq 1 \\ \log|x| & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\int_x^1 \frac{dt}{t^{\alpha}} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right) & \text{se } \alpha \neq 1 \\ -\log|x| & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} \int_x^1 \frac{dt}{t^{\alpha}} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases} .$$

Dunque , l'integrale esiste (in senso improprio) **solo per $\alpha < 1$ (ordine di infinito basso)**

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}}$

La funzione non è limitata nell'intorno di 0 e di 1; scelto un punto interno all'intervallo, ad esempio 1 / 2 , proviamo che f è integrabile in senso improprio in (0 , 1 / 2] e in [1 / 2 , 1) .

Poiché $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}} = 2 \operatorname{arcsen}\sqrt{x} + c$

$$\lim_{x\to 0} \int_x^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}} = \lim_{x\to 0} 2(\pi/4 - \operatorname{arcsen}\sqrt{x}) = \pi/2$$

$$\lim_{x\to 1} \int_{1/2}^{x} \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}} = \lim_{x\to 1} 2(\operatorname{arcsen}\sqrt{x} - \pi/4) = \pi/2$$

In definitiva l'integrale proposto esiste e vale π .

Più semplicemente, possiamo scrivere:

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}} = \Big[2 (\pi / 4 - \text{arcsen} \sqrt{x}) \Big]_0^{1/2} = \pi / 2$$

$$\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}} = \Big[2 (\text{arcsen} \sqrt{x} - \pi / 4) \Big]_{1/2}^{1} = \pi / 2$$

3. $$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x \log x}$$

L'integrale è esteso ad un intervallo non limitato ; in più la funzione non è limitata nell'intorno di $x = 0$, né in quello di $x = 1$.

Dobbiamo dunque verificare se esistono in senso improprio gli integrali elementari:

$$\int_0^{1/2} f(x)\, dx \ , \quad \int_{1/2}^{1} f(x)\, dx \ , \quad \int_1^{2} f(x)\, dx \ , \quad \int_2^{+\infty} f(x)\, dx$$

(ovviamente, la scelta degli estremi ½ e 2 è arbitraria; quello che serve è ottenere intervalli in cui la funzione non è limitata nell'intorno di un solo estremo). Poiché

$$\int \frac{dx}{x \log x} = \log \left| \log x \right| + c$$

è facile vedere che nessuno dei suddetti integrali esiste e dunque non esiste nemmeno l'integrale proposto. (Per arrivare a questa conclusione, basta che almeno uno degli integrali non esista) .

4. $\int_0^{\pi} \operatorname{tg} x \, dx$

La funzione non è limitata nell'intorno di $\pi / 2$: dobbiamo verificare se esistono in senso improprio gli integrali

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x \, dx \quad , \quad \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{tg} x \, dx \quad .$$

Poiché

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\log\left|\cos x\right| + c$$

si ha :

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x \, dx = \lim_{x \to \pi/2} -\log\left|\cos x\right| = +\infty$$

o più semplicemente

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x \, dx = \Big[-\log\left|\cos x\right|\Big]_0^{\pi/2} = +\infty$$

Questo basta per provare che l'integrale non esiste.

Proprietà dell'integrale improprio

Valgono le proprietà viste per l'integrale, eccetto i risultati sulla media integrale.

In particolare, la **linearità** .

A questo proposito si osservi però che l'uguaglianza

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

vale **solo se i due integrali a secondo membro esistono**. Può infatti accadere che f e g non siano integrabili (e quindi il secondo membro dell'uguaglianza non ha senso), mentre f + g lo è (e quindi il primo membro dell'uguaglianza ha senso).

Ad esempio l'uguaglianza $\int_0^1 \frac{e^x-1}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{e^x}{x}\,dx - \int_a^b \frac{1}{x}\,dx$ è falsa , perché i due integrali a secondo membro non esistono (a differenza di quello a primo membro, che esiste in senso proprio).