1.

$$F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{e^t}{t}\, dt$$

La funzione f (t) :

- è definita per $t \neq 0$
- ha il segno di t
- non è integrabile nell'intorno di 0
- è integrabile nell'intorno di $-\infty$.

Per la funzione F (x) si hanno i seguenti risultati:

<u>campo di esistenza</u>

è definita per $x < 0$

Poiché la funzione f (t) non è integrabile - neppure in senso improprio - nell'intorno del punto di discontinuità 0, l'intervallo di estremi -1 e x non deve contenere questo punto; deve dunque essere $x < 0$.

<u>segno</u>

è positiva per $x < -1$, nulla per $x = -1$, negativa per $-1 < x < 0$

Abbiamo trovato che il campo di esistenza della funzione integrale è $(-\infty, 0)$. Questi valori di x individuano intervalli di integrazione nella semiretta negativa, in cui la funzione integranda è negativa; per $-1 < x < 0$ il primo estremo di integrazione è minore del secondo e quindi l'integrale ha lo stesso segno della funzione f (t); se invece $x < -1$, il primo estremo diventa maggiore del secondo e quindi l'integrale ha il segno opposto a quello di f (t).
In conclusione: $F(x) < 0$ per $-1 < x < 0$, $F(x) > 0$ per $x < -1$.

<u>limiti</u>

per $x \to 0$ $\quad F(x) \to -\infty$, la retta $x = 0$ è asintoto verticale per $x \to -\infty$ $F(x) \to L > 0$, la retta $y = L$ è asintoto orizzontale

derivata

$$F'(x) = \frac{e^x}{x}.$$

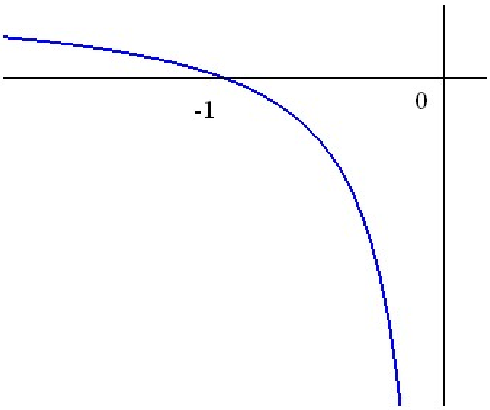
La derivata è negativa in tutto il dominio, dunque F (x) risulta sempre decrescente.

derivata seconda

$$F''(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}.$$

La derivata seconda è negativa in tutto il dominio, dunque F (x) risulta sempre concava.

grafico



2.

$$F(x) = \int_0^x \frac{t}{\mathrm{tg}\, t}\, dt$$

La funzione f (t)

- è definita per $t \neq \pi/2 + k\pi$ e per $t \neq k\pi$

- è integrabile nell'intorno di 0 e di $\pi / 2 + k\pi$
- non è integrabile nell'intorno di $k\pi$ ($k \neq 0$).

Per la funzione F (x) si hanno i seguenti risultati:

campo di esistenza

è definita per $x \in (-\pi, \pi)$;

possiamo limitarci a studiarla per $x \in [0, \pi)$, perché è dispari: infatti

$$F(-x) = \int_0^{-x} \frac{t}{\operatorname{tg} t}\,dt = \int_0^{x} -\frac{s}{\operatorname{tg} s}\,ds = -F(x)$$

(abbiamo posto s = - t).

La funzione f (t) ha una discontinuità eliminabile - dunque inessenziale per quanto riguarda l'integrabilità - in x = 0 e in $x = \pi / 2 + K\pi$.
La discontinuità in $x = K\pi$ ($k \neq 0$) è invece di seconda specie, dunque l'integrabilità di f (t) nell'intorno di tali punti non è assicurata. Poiché f (t) è un infinito di ordine 1 per $t \to K\pi$ ($k \neq 0$) (verificare il risultato), la funzione non è integrabile nell'intorno di tali punti, che dunque non devono comparire nell'intervallo di estremi 0 e x: il campo di esistenza della funzione integrale è pertanto l'intervallo $(-\pi, \pi)$.

Per $0 < x < \pi / 2$ la funzione f (t) è positiva e tale risulta anche F (x).
Per $\pi / 2 < x < \pi$ la funzione f (t) è negativa e quindi all'integrale positivo tra 0 e $\pi / 2$ aggiungiamo l'integrale negativo tra $\pi / 2$ e x: a priori non è facile capire quale sia il segno della somma.
Analoghe considerazioni per $x < 0$.

limiti e valori notevoli

per $x \to \pi$ $F(x) \to -\infty$

(che il limite sia infinito, è già stato giustificato; il segno dipende da quello di f (t) nell' intorno sinistro di π)

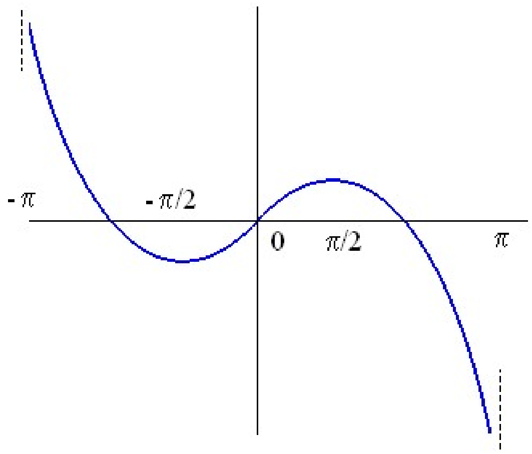
F (0) = 0

derivata

$$F'(x) = \frac{x}{\operatorname{tg} x}$$

La derivata è positiva in $(0, \pi / 2)$, negativa in $(\pi / 2, \pi)$, dunque F (x) risulta crescente nel primo intervallo, decrescente nel secondo.

grafico



3.

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\log |t|}$$

La funzione f (t)

- è definita per $t \neq 0$ e per $t \neq \pm 1$ ed è pari
- è positiva per $|t| > 1$, negativa per $|t| < 1$, $t \neq 0$
- è integrabile nell'intorno di 0 (discontinuità eliminabile)
- non è integrabile nell'intorno di ± 1 ($f(t) \approx 1 / (|t| - 1)$)
- non è integrabile nell'intorno di $\pm\infty$ ($f(t) > 1 / |t|$)

Per la funzione F (x) si hanno i seguenti risultati:

campo di esistenza

è definita per $x \in (-1, 1)$;

possiamo limitarci a studiarla per $x \in [0, 1)$, perché è dispari: infatti

$$F(-x) = \int_0^{-x} \frac{dt}{\log|t|} = \int_0^{x} -\frac{ds}{\log|s|} = -F(x)$$

(abbiamo posto s = - t).

segno

negativa in (0 , 1)

limiti e valori notevoli

per $x \to 1^-$ $F(x) \to -\infty$

(che il limite sia infinito, è già stato giustificato; il segno dipende da quello di f (t) in (0 ,1))

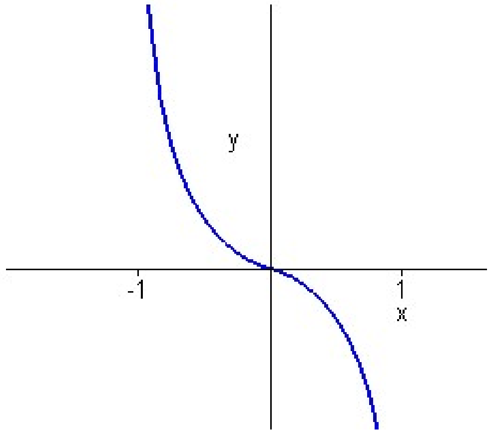
F (0) = 0

derivata

$$F'(x) = \frac{1}{\log|x|}$$

La derivata è negativa in (0, 1), dunque F (x) è decrescente nell'intervallo.

grafico



4.

$$F(x) = \int_{1}^{x} \frac{\log t}{\sqrt[3]{t(t-1)}}\, dt$$

La funzione f (t)

- è definita per t > 0 , t ≠ 1
- è positiva
- è integrabile nell'intorno di 0;

  infatti $|f(t)| \approx |\log t| / \sqrt[3]{t} < 1/t^{\alpha+1/3}$; scegliamo α > 0 tale che sia α + 1/3 < 1 , cioè α < 2/3 e concludiamo per confronto
- è integrabile nell'intorno di 1 (discontinuità eliminabile)
- non è integrabile nell'intorno di +∞

  infatti $f(t) \approx \log t / t^{2/3} > 1/t^{2/3}$

Per la funzione F (x) si hanno i seguenti risultati:

<u>campo di esistenza</u>

è definita per x ≥ 0

<u>segno</u>

positiva per x > 1 (essendo f (t) positiva, il segno di F (x) dipende solo dal fatto che sia x > 1 oppure < 1 (nel primo caso i due estremi sono messi nell’ordine corretto; nel secondo sono messi nell’ordine inverso: cambiamo l’ordine agli estremi e allo stesso tempo cambiamo di segno all’integrale)

<u>limiti e valori notevoli</u>

per $x \to 0$ F (x) $\to c \in \mathbb{R}^-$

(che il limite sia finito, è già stato giustificato; il segno dipende da quello di f (t) in (0 ,1))

F (1) = 0

per $x \to +\infty$ F (x) $\to \infty$

<u>derivata</u>

$$F'(x) = \frac{\log x}{\sqrt[3]{x(x-1)}}$$

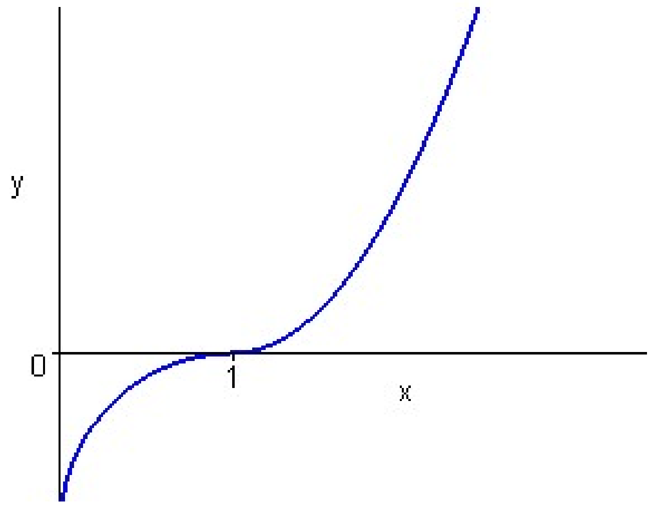
La derivata è positiva e dunque F (x) è crescente.

per $x \to 0$ F’ (x) $\to +\infty$

per $x \to 1$ F’ (x) $\to 0$

per $x \to +\infty$ F’ (x) $\to 0$ non c’è asintoto all’infinito

<u>grafico</u>



5.

$$F(x) = \int_1^x \frac{t(t-1)}{\log t}\, dt$$

La funzione f (t)

- è definita per t > 0 e per t $\neq$ 1
- è positiva
- è integrabile nell'intorno di 0 e nell'intorno di 1 (discontinuità eliminabili)
- non è integrabile nell'intorno di +∞ (non è infinitesima)

Per la funzione F (x) si hanno i seguenti risultati:

campo di esistenza

è definita per x ≥0 ;

segno

negativa in [0 , 1) , positiva in (1 , +∞) , nulla per x = 1

limiti notevoli

per x $\rightarrow$ + ∞ F (x) $\rightarrow$ + ∞

derivata

$$F'(x) = \frac{x(x-1)}{\log x}$$

La derivata è positiva , dunque F (x) è crescente

per $x \to 0$ F’ (x) $\to 0$

per $x \to 1$ F’ (x) $\to 1$

per $x \to +\infty$ F’ (x) $\to +\infty$ (non c’è asintoto)

grafico