• $z^2+z+1=0$

$$z=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

• $z^2-\bar{z}=1$

$$z=x+iy$$

$$x^2-y^2+2ixy-x+iy=1$$

$$\begin{cases} x^2-y^2-x=1 \\ y(2x+1)=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x^2-x-1=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4}-y^2=1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow z=(1\pm\sqrt{5})/2$$

• $|z^2+1|=z-z^2$

$$|x^2-y^2+1+2ixy|=x+iy-(x^2-y^2+2ixy)$$

$$\sqrt{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}=(x-x^2+y^2)+iy(1-2x)$$

$$\begin{cases} y=0 \\ x^2+1=x-x^2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=+1/2 \\ \sqrt{\left(\frac{5}{4}-y^2\right)^2+y^2}=\frac{1}{4}+y^2 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$2x^2-x+1=0$$

$$\Delta<0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{25}{16}-\frac{5}{2}y^2+\cancel{y^4}+y^2=\frac{1}{16}+\frac{1}{2}y^2+\cancel{y^4}$$

$$\frac{24}{16}=2y^2 \rightarrow y^2=\frac{3}{4} \rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

• $z^2=3+4i$

$$\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ 2xy=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=2/x \\ x^2-\frac{4}{x^2}=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=2/x \\ x^4-3x^2-4=0 \end{cases}$$

$$x^2=\frac{3\pm5}{2}=\begin{cases} 4 \\ -1 \ \text{no} \end{cases} \rightarrow x=\pm2 \rightarrow z=\pm(2+i)$$

$$|z| = i - 4z$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = i - 4x - 4iy$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = -4x + i(1-4y)$$

$$\begin{cases} y = 1/4 \\ \sqrt{x^2+1/16} = -4x \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y = 1/4 \\ x^2 + \frac{1}{16} = 16x^2 \quad (x \leq 0) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y = 1/4 \\ x^2 = \frac{1}{16 \cdot 15} \end{cases}$$

$$z = -\frac{1}{4\sqrt{15}} + i\frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} iz - \bar{\omega} = -1 \\ z^2 + \omega^2 = -1 \end{cases}$$

$$\bar{\omega} = iz + 1 \rightarrow \omega = \overline{iz+1} = \bar{i}\bar{z} + \bar{1} = \bar{i}\,\bar{z} + \bar{1} = -i\bar{z} + 1$$

$$z^2 + (1 - i\bar{z})^2 = -1$$

$$x^2 - y^2 + 2ixy + (1 - i(x - iy))^2 = -1$$

$$x^2 - y^2 + 2ixy + (1 - y - ix)^2 = -1$$

$$\cancel{x^2} - \cancel{y^2} + 2ixy + 1 - 2y + \cancel{y^2} - \cancel{x^2} - 2ix + 2ixy = -1$$

$$2 - 2y + i(4xy - 2x) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2 - 2y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 1/2 \\ 2 - 2y = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{matrix} z = i \\ \omega = -i(-i) + 1 = 0 \end{matrix}$$

$z^3 = (1+i)\bar{z}$

$z = 0$ è soluzione.

Cerchiamo soluzioni non nulle nella forma $z = r e^{i\vartheta}$. Sostituendo nell'equazione :

$r^3 e^{3i\vartheta} = \sqrt{2} e^{i\pi/4} r e^{-i\vartheta} = \sqrt{2} r e^{i(\pi/4-\vartheta)}$

da cui

$r^3 = \sqrt{2} r \rightarrow r = 0$ che non ci interessa oppure $r = \sqrt[4]{2}$

$3\vartheta = \pi/4 - \vartheta + 2k\pi \rightarrow \vartheta = \pi/16 + 2k\pi/3 \quad k = 0, 1, 2$

$$\begin{cases} z + w\bar{z} = |z| \\ \bar{z} + wz = 1 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si deduce $z \neq 0$.
Quindi $w = \dfrac{1-\bar{z}}{z}$.

Sostituendo nella prima eq.:

$$z + \frac{1-\bar{z}}{z}\,\bar{z} = |z| \quad \longleftrightarrow \quad z^2 + \bar{z} - \bar{z}^2 = z|z|$$

Ponendo $z = x+iy$:

$$\cancel{x^2 - y^2} + 2ixy + x - iy \cancel{-x^2 + y^2} + 2ixy = x\sqrt{x^2+y^2} + iy\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\begin{cases} x = x\sqrt{x^2+y^2} \\ 4xy - y = y\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

(i) $\begin{cases} x = 0 \\ -y = y|y| \end{cases}$ Dovendo essere $y \neq 0$ (perché $z \neq 0$) $\begin{cases} x = 0 \\ |y| = -1 \end{cases}$ nessuna sol.

(ii) $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = 1 \\ 4xy - y = y \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ x = 1/2 \end{cases}$

$$\longleftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

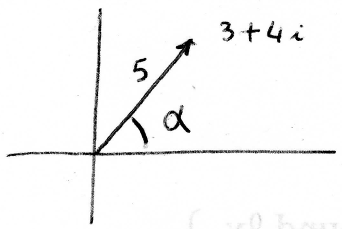
$z = 1 \rightarrow w = \dfrac{1-\bar{z}}{z} = 0$

$z = -1 \rightarrow w = -2$

$z = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}) \rightarrow w = \dfrac{1 - \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})}{\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = 1$

$z = \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3}) \rightarrow w = \dfrac{1 - \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})}{\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})} = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = 1$

$z^2 = 3 + 4i$



$$3+4i = 5\, e^{i\alpha}$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{5} \;, \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5}$$

$$z = \pm\sqrt{5}\; e^{i\alpha/2}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

il segno da prendere è quello positivo

$$> \quad z = \pm(2+i)$$

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

ancora il segno è quello positivo

Osservazione: nel precedente elenco di esercizi, questo era stato svolto usando la rappresentazione algebrica.

$$|z|\,z + \bar{z}^3 = 0$$

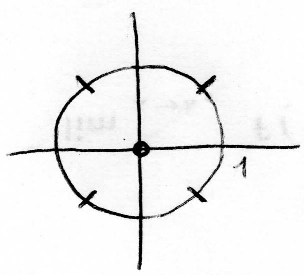
$z=0$ è soluzione; cerchiamo le altre soluzioni, ponendo $z = re^{i\theta}$

$$|z|\,z = -\bar{z}^3 \;\rightarrow\; r^2 e^{i\theta} = (1e^{i\pi})(r^3 e^{-3i\theta})$$

$$r^2 e^{i\theta} = r^3 e^{i(\pi-3\theta)}$$

$$\rightarrow \; r=1$$

$$\theta = \pi - 3\theta + 2k\pi \quad \text{cioè} \quad \theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$



$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm i)\,, \qquad z = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1\pm i)$$

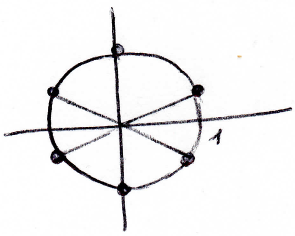
$z^2 = -\bar{z}^4$

$z = 0$ è soluzione

$z = re^{i\theta} \rightarrow r^2 e^{2i\theta} = r^4 e^{(-4\theta+\pi)i} \rightarrow$

$r = 1$

$2\theta = -4\theta + \pi + 2k\pi \rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$



$\frac{1}{2}(\sqrt{3} \pm i)$

$\frac{1}{2}(-\sqrt{3} \pm i)$

± 1

$$\begin{cases} z^2 + w|z| = 0 \\ w^2 + z|w| = 0 \end{cases}$$

$z = 0 \rightarrow w = 0$

Cerchiamo soluzioni con $z \neq 0$.

Dalla prima eq.: $w = -z^2/|z|$.

Sostituendo nella seconda:

$\frac{z^4}{|z|^2} - z|z| = 0$

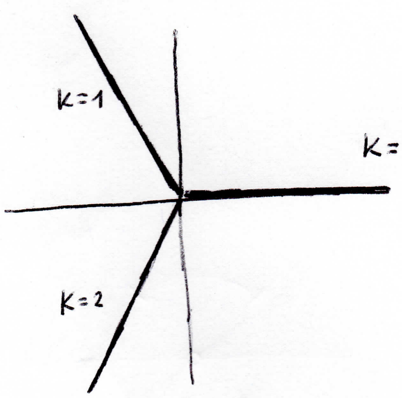
NB. $\left| -\frac{z^2}{|z|} \right| = \frac{|z|^2}{|z|} = |z|$

$z^4 = z|z|^3$

$r^4 e^{4i\theta} = r^4 e^{i\theta} \rightarrow$

$r > 0$ qualunque

$4\theta = \theta + 2k\pi \rightarrow \theta = 2k\frac{\pi}{3}$



$(k=0) \quad z = r > 0$

$(k=1) \quad z = r\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

$= a(-1 + i\sqrt{3})$

$a > 0$
Abbiamo posto
$r/2 = a$

$(k=2) \quad z = r\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

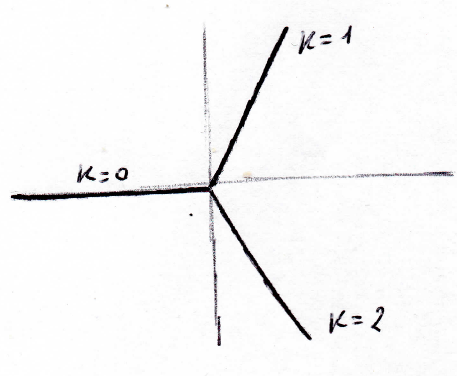
$= a(-1 - i\sqrt{3})$

idem

$z = r > 0 \rightarrow w = -z^2/|z| = -r$

$z = a(-1 + i\sqrt{3}) \rightarrow w = a(1 + \sqrt{3}i)$

$z = a(-1 - i\sqrt{3}) \rightarrow w = a(1 - \sqrt{3}i)$



$$\begin{cases} z^2 + w\,|z|^2 = 0 \\ \bar{z} + w\,z = 0 \end{cases}$$

$z = 0$, $w \in \mathbb{C}$ soluz.

Cerchiamo soluzioni con $z \neq 0$.

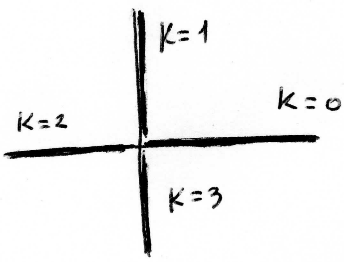
$w = -\dfrac{\bar{z}}{z}$ (dalla seconda eq.)

Sostituendo nella prima eq:

$z^2 - \dfrac{\bar{z}}{z}\,|z|^2 = 0 \;\rightarrow\; z^3 = \bar{z}\,|z|^2 \rightarrow r^3 e^{3i\theta} = r^3 e^{-i\theta}$

$r > 0$ qualunque

$3\theta = -\theta + 2k\pi \;\rightarrow\; \theta = k\frac{\pi}{2}$



$(k=0)$ $z = r > 0$, $w = -1$

$(k=1)$ $z = ir$, $w = 1$

$(k=2)$ $z = -r$, $w = -1$

$(k=3)$ $z = -ir$, $w = 1$

...durre a forma canonica la quadrica $x^2 + xy = 1$

Poniamo $\begin{cases} x = \cos\alpha\, X + \operatorname{sen}\alpha\, Y \\ y = -\operatorname{sen}\alpha\, X + \cos\alpha\, Y \end{cases}$ nell'equazione:

$$\cos^2\alpha\, X^2 + \operatorname{sen}^2\alpha\, Y^2 + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\, XY - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\, X^2 +$$
$$\cos^2\alpha\, XY - \operatorname{sen}^2\alpha\, XY + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\, Y^2 = 1$$

Il coefficiente di XY è $2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha =$ $\operatorname{sen} 2\alpha + \cos 2\alpha$ ed è nullo se $\operatorname{tg} 2\alpha = -1$. Possiamo scegliere $\alpha = -\pi/8$.

$$\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{8}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} = -\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

L'eq. diventa $(1+\sqrt{2})X^2 + (1-\sqrt{2})Y^2 = 2$ che è quella di un'iperbole.