3. Ritorno ai numeri naturali - Principio di induzione

Sia P (n) una proposizione il cui enunciato è funzione di una variabile naturale n; a questo proposito si parla anche di successione di proposizioni.

Un esempio può essere:

P (n) : n^2 è pari .

Non possiamo dire se si tratta di un'affermazione vera o falsa, fino a quando non attribuiamo ad n un valore ben preciso. Ad esempio, P (2) è la proposizione " 2^2 è pari " ed è vera, mentre P (3) è la proposizione " 3^2 è pari " ed è falsa. E' facile vedere che la proposizione è vera per tutti gli n pari, falsa per i dispari.

Meno ovvia è la validità della proposizione

P (n) : $2^n > n^2$.

Il principio di induzione fornisce un criterio per stabilire se una proposizione P (n) è vera per ogni valore di n o almeno definitivamente, cioè da un certo valore in poi, senza doverla verificare per ogni singolo valore.

Principio di induzione

Sia P (n) una successione di proposizioni che verifica le seguenti ipotesi:

- PASSO BASE : la proposizione P (1) è vera
- PASSO INDUTTIVO : per ogni n, se P (n) è vera, è vera anche P (n + 1);
  in simboli P (n) $\Rightarrow$ P (n + 1).

Allora P (n) è vera per ogni n.

Osservazione

Talvolta nel passo base invece del valore 1 , si prende un valore $\overline{n}$ (che può essere anche 0).

In tal caso l'enunciato del principio di induzione diventa:

Principio di induzione (forma alternativa)

Sia P (n) una successione di proposizioni che verifica le seguenti proprietà:

- esiste un numero naturale $\overline{n}$ tale che P ($\overline{n}$) è vera
- per ogni naturale n $\geq \overline{n}$, se P (n) è vera, è vera anche P (n + 1).

Allora P (n) è vera per ogni n $\geq \overline{n}$.

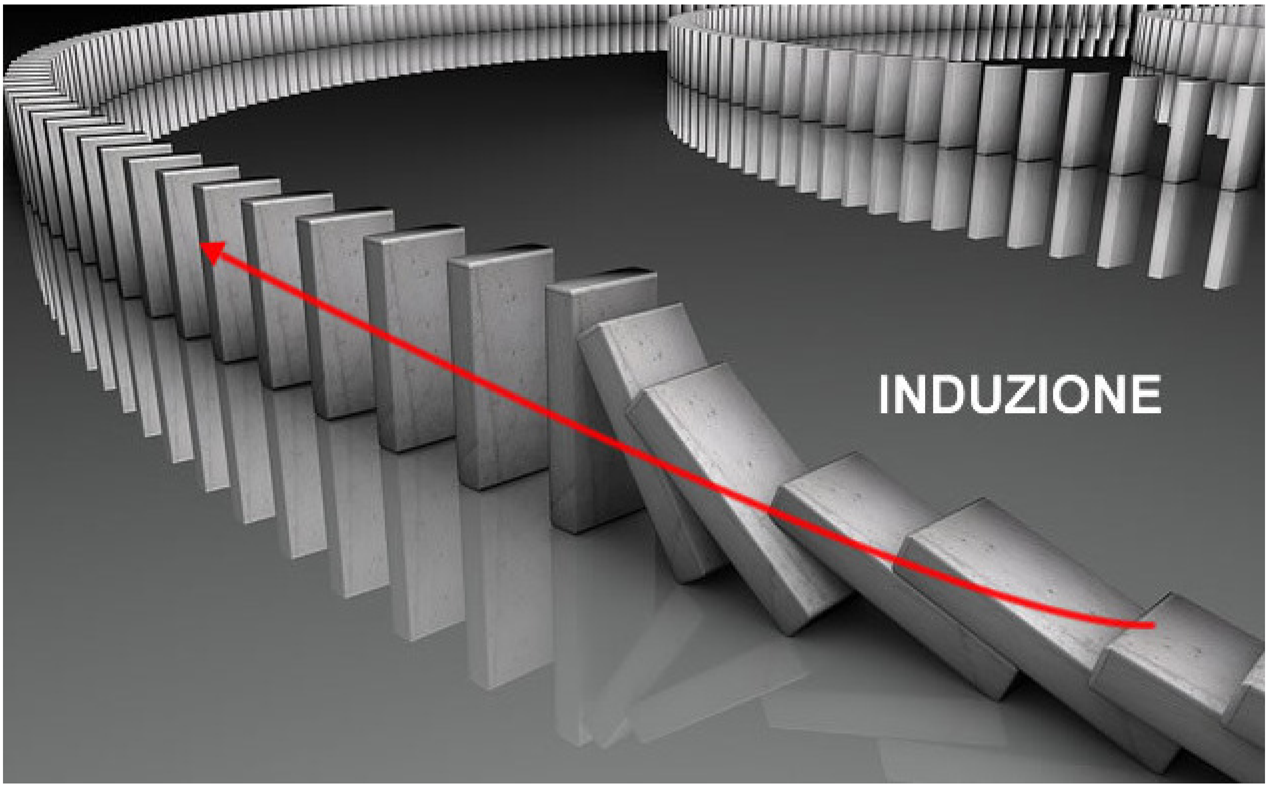
Osservazione 2

Per applicare il principio di induzione, non basta provare che vale l'implicazione P (n) $\Rightarrow$ P (n + 1), ma occorre che ci sia un passo base da cui partire..

Ad esempio, la successione di proposizioni P (n) : n > n + 1 verifica la proprietà induttiva n > n + 1 $\rightarrow$ n + 1 > n + 2 (basta aggiungere 1 ad ambo i membri dell'ipotesi), ma è banalmente sempre falsa.

Spesso, per esemplificare il modo in cui opera il principio di induzione, si parla di effetto domino.

Se dispongo migliaia di tavolette del domino vicine tra loro (in modo che se ne cade una qualsiasi, fa cadere la successiva) e se faccio cadere la prima, allora tutte le altre verranno giù di conseguenza.



Oltre che alla dimostrazione di proposizioni P (n), il principio di induzione può essere utilizzato per definire correttamente certe funzioni della variabile n.

Ad esempio, il numero **n !** (**n fattoriale)** è generalmente definito dalla scrittura:

$1.\ 2.\ 3 \ldots.\ n$

come prodotto dei primi n numeri naturali. Una definizione che faccia a meno dei punti di sospensione può essere data nella **forma induttiva** (o **ricorsiva**) :

$1\,! = 1$

$(n + 1)\,! = n\,!\,(n + 1)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

Nelle applicazioni è utile definire anche 0 ! ponendolo uguale ad 1.

Un altro esempio di definizione ricorsiva è data dal simbolo di **sommatoria.** Data una successione a (n) di numeri reali (nel senso che ad ogni $n \in \mathbf{N}$ associamo un numero reale indicato con a (n)), la somma a (1) + … + a (n) può essere scritta utilizzando il simbolo

$$\sum_{k=1}^{n} a(k)$$

definito da

$$\sum_{k=1}^{1} a(k) = a(1)$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} a(k) = \sum_{k=1}^{n} a(k) + a(n+1).$$

In certi casi la somma può partire da k = 0.

Anche lo stesso insieme N dei naturali può essere definito in modo corretto usando l'induzione:

$$1 \in N$$

$$n \in N \Rightarrow n+1 \in N .$$

Esempi di dimostrazione per induzione

1. $2^n > n^2$

Un esame diretto prova che la disuguaglianza non può essere vera $\forall$ n (ad esempio, è vera per n = 1 ed n = 5, falsa per n = 2 , n = 3 , n = 4). Facciamo vedere che è vera a partire da n = 5 (che diventa quindi il nostro passo base). Per provare l'induttività, dobbiamo far vedere che $\forall\ n \geq 5$, $2^n > n^2 \Rightarrow 2^{n+1} > (n+1)^2$.

A questo proposito si ha: $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^2$.

Rimane da far vedere che $\forall\ n \geq 5$ è vero che $2 \cdot n^2 > (n+1)^2$.

Quest'ultima disuguaglianza si può riscrivere come $n^2 - 2n - 1 > 0$. Risolvendo, si trova che deve essere $n > 1 + \sqrt{2}$, condizione ampiamente verificata nel nostro caso, essendo $n \geq 5$.

2. Somma di una progressione geometrica:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad , \quad \forall\, x \neq 1.$$

In questo caso la successione P (n) è definita dall'uguaglianza che dobbiamo stabilire. Osservare che in questo caso partiamo da n = 0.

- P (0) è vera, perché per n = 0 entrambi i membri dell'uguaglianza valgono 1.
- Proviamo l'induttività, cioè che P (n) $\Rightarrow$ P (n + 1); in termini concreti :

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n+1} x^k = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x} \quad .$$

Per questa verifica si ha successivamente:

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1}$$

(nella somma a primo membro abbiamo isolato il termine corrispondente a k = n + 1)

$$= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1}$$

(abbiamo utilizzato l'ipotesi che P (n) è vera)

$$= \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x} .$$

Esercizio: si verifichi che nel caso x = 1, la somma vale n + 1.

3. Disuguaglianza di Bernoulli:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \qquad \text{per } x > -1.$$

In realtà la disuguaglianza vale in senso stretto (cioè con il segno >) tranne che se x = 0 oppure n = 1.

- Per n = 0 e n = 1 la proposizione è evidentemente verificata (con il segno di uguale)..

- Per provare che la proposizione è induttiva, supponiamo la disuguaglianza vera per un assegnato n e verifichiamola per n + 1. Moltiplicando ambo i membri per la quantità 1 + x > 0, si ottiene

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq$$

$$\geq 1+(n+1)x .$$

4.

$$\log_2(1+n) \leq n .$$

- Per n = 0 e n = 1 la proposizione è verificata con il segno di uguaglianza.

- Per provare che la proposizione è induttiva, supponiamo la disuguaglianza vera per $n \geq 1$ e proviamola per $n + 1$:

$$n+1 = n + \log_2 2 \geq \log_2 (1+n) + \log_2 2 =$$

$$= \log_2 (2n+2).$$

Per completare la dimostrazione, occorre verificare che risulta

$$\log_2 (2n+2) \geq \log_2 (n+2)$$

cioè

$$2n+2 \geq n+2$$

e questo è vero per ogni n naturale.

5.

$$2^{n-1} \leq n! \leq n^n \ .$$

- Per $n = 1$ le due disuguaglianze sono verificate con il segno di uguale

- Supponiamo la proposizione vera per n e proviamo separatamente le due disuguaglianze per $n + 1$:

$$2^n = 2 . 2^{n-1} \leq 2(n!) \leq n!\,(n+1) = (n+1)!$$

$$(n+1)! = n!\,(n+1) \leq n^n\,(n+1) \leq (n+1)^n\,(n+1) =$$

$$= (n+1)^{n+1}.$$

6.

$$n(n^2+5) \text{ è divisibile per } 6$$

- Per n = 1 la proposizione è banalmente vera

- Supponiamola verificata per n arbitrario e deduciamola per n + 1:

Riscriviamo il termine $(n+1)(n^2+2n+6)$ in modo da far comparire $n(n^2+5)$:

$$n(n^2+2n+6) + (n^2+2n+6)$$

$$n(n^2+5) + n(2n+1) + (n^2+2n+6)$$

$$n(n^2+5) + 3(n^2+n+2).$$

Dei due termini a cui siamo arrivati, il primo è divisibile per 6 per ipotesi, il secondo è sicuramente divisibile per 3; rimane dunque da provare che $n^2 + n + 2$ è divisibile per 2. Questo si può verificare per induzione oppure distinguendo i casi n pari ed n dispari; lasciamo la verifica per esercizio.

7.

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

- Per n = 1 la proposizione è banalmente vera

- Per n = 2 assume la forma $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, che è di immediata verifica, una volta che si sia sviluppato il quadrato a primo membro.

- Supponiamo dunque $n \geq 2$ e proviamo la proposizione per n + 1:

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right)^2 + x_{n+1}^2 + 2\, x_{n+1} \sum_{k=1}^{n} x_k \leq$$

$$\leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + x_{n+1}^2 + 2\, x_{n+1} \sum_{k=1}^{n} x_k =$$

$$= n \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + x_{n+1}^2 + \sum_{k=1}^{n} 2\, x_{n+1}\, x_k \leq$$

$$\leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + x_{n+1}^2 + \sum_{k=1}^{n} (x_{n+1}^2 + x_k^2) =$$

$$= (n+1) \sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 .$$

Cenni di calcolo combinatorio

Occupiamoci adesso brevemente di alcuni classici problemi di calcolo combinatorio.

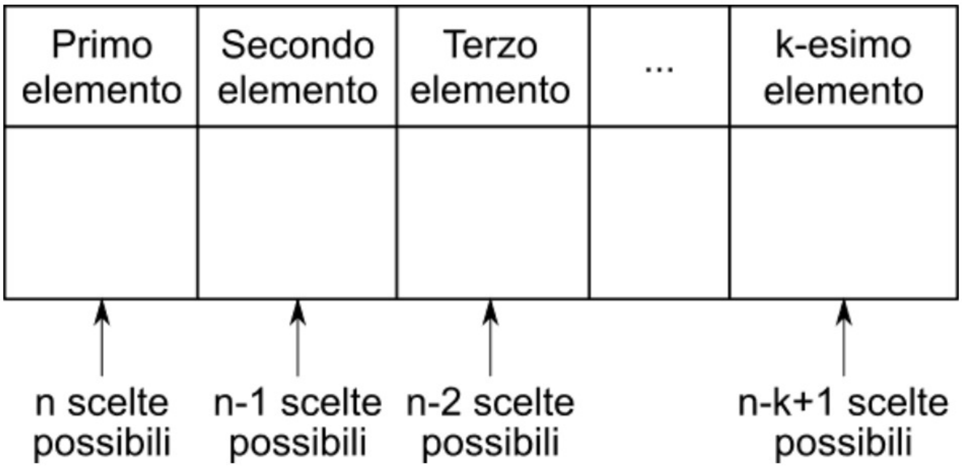
Per un’esposizione più accurata rimando al libro di testo.

Sia A un insieme di n elementi e sia k un numero naturale $\leq$ n. Selezioniamo k elementi di A , <u>senza ripetizioni e però tenendo conto dell’ordine di scelta</u>. Vogliamo trovare il numero $D_{n\,,\,k}$ delle possibili selezioni (che sono dette **disposizioni semplici** di n oggetti presi k alla volta).

Ad esempio, in una gara a cui partecipano 10 concorrenti, vengono premiati i primi 3: si vuole contare quante sono le classifiche possibili; nessun concorrente può vincere più di un premio , né sono ammessi premi assegnati ex-aequo. In questo caso interessano le disposizioni semplici di n = 10 elementi presi k = 3 alla volta.

Per trovare il numero $D_{n,\,k}$ delle disposizioni, osserviamo che la prima scelta è compiuta tra n elementi, la seconda tra n - 1 (non potendo essere scelto di nuovo l'elemento già selezionato). Il numero di coppie è dunque n (n – 1). La terza scelta è compiuta tra n – 2 elementi; il numero di terne è dunque n (n – 1) (n – 2). Procedendo in questo modo, al passo k-esimo si trova:

$$D_{n,k} = n(n-1)\ldots(n-(k-1)). \qquad (*)$$



Si osservi che il numero trovato è il prodotto di k naturali decrescenti consecutivi a partire da n; lo possiamo riscrivere nella forma

$$D_{n,k} = n!/(n-k)!. \qquad (**)$$

Nel caso particolare k = n (n oggetti presi n alla volta) le disposizioni prendono il nome di **permutazioni** di n elementi; il loro numero P_n è dato da

$$P_n = n!$$

Il risultato si deduce direttamente da (*) ; per dare significato anche a (**) , occorre porre 0! = 1 .

Consideriamo ancora la scelta di n oggetti presi k alla volta senza ripetizioni, ma stavolta non consideriamo l'ordine in cui si esegue la scelta. In questo caso si parla di **combinazioni** di n elementi presi k alla volta Ad esempio, in una gara a cui partecipano 10 concorrenti, ne vengono premiati 3 ex - aequo : si vuole contare quante sono le possibili scelte. In questo caso interessano le combinazioni di n = 10 elementi presi k = 3 alla volta.

Rispetto al problema precedente due combinazioni sono diverse solo se non hanno gli stessi elementi. In altre parole, consideriamo le disposizioni semplici, ma identifichiamo quelle che differiscono solo per l'ordine in cui sono stati scelti gli elementi. Questo significa che le k! permutazioni di una disposizione danno origine ad una sola combinazione.

Dunque il numero di combinazioni di n oggetti presi k alla volta è dato da

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

Osserviamo che l'espressione ottenuta per $C_{n,k}$ è valida anche per k = 0 e per k = n ed in entrambi i casi essa fornisce il valore 1 , in accordo con il fatto che esiste un unico sottoinsieme di A formato da 0 elementi (l'insieme vuoto) ed un unico formato da n elementi (l'insieme A stesso)).

E' facile verificare l'uguaglianza $C_{n,k} = C_{n,n-k}$ che d'altra parte si spiega facilmente se si osserva che ogni combinazione di k elementi individua una combinazione di n – k elementi (l'insieme complementare) .

Per indicare il numero $C_{n,k}$ delle combinazioni di n elementi presi k alla volta si usa comunemente il simbolo:

$$\binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

a cui si dà il nome di **coefficiente binomiale** di indice superiore n e indice inferiore k.

La terminologia adottata è legata al seguente **problema**.

Dati due numeri a e b , vogliamo calcolare $(a + b)^n$ dove n è un numero naturale.

La soluzione è data dalla cosiddetta **formula del binomio di Newton:**

$$(a+b)^n = = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \ b^{n-k}$$

Per dimostrare la formula, osserviamo che è

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\ ....(a+b)$$

e che lo sviluppo del secondo membro è la somma dei prodotti ottenuti scegliendo un termine da ciascuno degli n fattori, dunque prodotti del tipo $a^k \ b^{n-k}$ (in questo caso si sceglie k volte a e dunque n – k volte b). Questo prodotto si ottiene tante volte quanti sono i modi di scegliere i k fattori da cui prendere a, prendendo b dai rimanenti n - k fattori, dunque $\binom{n}{k}$ volte.

E’ comodo ordinare i coefficienti binomiali in una tabella (detta **triangolo di Tartaglia o di Pascal**), nella quale il coefficiente $\binom{n}{k}$ si trova all’incrocio tra la riga di indice n e la colonna di indice k, come appare nella figura successiva.

$k \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	.....	
n $\downarrow$								
0	$\binom{0}{0}$							$(a+b)^0$
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$						$(a+b)^1$
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$					$(a+b)^2$
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$				$(a+b)^3$
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$			$(a+b)^4$
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$		$(a+b)^4$

Sulla riga di indice n si leggono i coefficienti dello sviluppo di $(a + b)^n$.

Nella prima colonna e nella diagonale compare solo il termine 1, poiché

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Un'altra notevole uguaglianza (la cui verifica lasciamo per esercizio) è la seguente:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad , \quad 1 \le k \le n-1$$

cioè nel triangolo, escludendo i due termini agli estremi di ciascuna riga che – come già verificato - sono sempre uguali ad 1, ogni termine si ottiene sommando due termini che stanno nella riga precedente: quello che sta nella stessa colonna e quello alla sua sinistra.

$k \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	…..
n $\downarrow$							
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	

Ad esempio:

$$(a+b)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} a^{4-k}\, b^k = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4 \ .$$

Si osservi in ciascuna riga la simmetria rispetto al centro, conseguenza dell'uguaglianza $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, che si spiega pensando che il numero di volte in cui posso scegliere k volte il termine a è lo stesso di quello in cui posso scegliere n-k volte il termine b.

0	1										(a+b)^0
1	1	1									(a+b)^1
2	1	2	1								(a+b)^2
3	1	3	3	1							(a+b)^3
4	1	4	6	4	1						(a+b)^4
5	1	5	10	10	5	1					(a+b)^5
6	1	6	15	20	15	6	1				(a+b)^6
7	1	7	21	35	35	21	7	1			(a+b)^7
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		(a+b)^8
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	(a+b)^9

<u>Osservazione</u>

Scrivendo la formula del binomio di Newton per a = b = 1, si trova

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Questa somma fornisce il numero dei sottoinsiemi di un insieme A di n elementi, comprendendo anche i sottoinsiemi impropri: l'insieme vuoto e l'insieme A stesso.

Esercizio

Nello sviluppo di $(x^3 - 2y^2)^5$ dire se compare il termine $x^6 y^6$ e in caso affermativo con quale coefficiente.

Successioni

Una funzione avente come dominio l'insieme **N** dei numeri naturali (o, più in generale, dei naturali maggiori di un certo numero) si dice **successione.**

Per descrivere i valori di una successione in corrispondenza ad ogni numero naturale 1, 2, 3,..., n,... si usano ad esempio i simboli $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots;$ ciascuno di essi si dice **termine** della successione. Così x_1 è il primo termine della successione, x_2 il secondo e così via.

Per indicare la successione si usa la notazione $\{ x_n \}_{n \in N}$, anche se comunemente ci si limita a scrivere $x_{n;}$ è la stessa imprecisione di linguaggio che ci fa scrivere una funzione nella forma f (x), anche se questo in realtà è il valore della funzione f in corrispondenza di x.

Esempi di successione sono

$$\frac{1}{n} \qquad \frac{n}{n+1} \qquad \sqrt{n^2 - 25}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \qquad (-1)^n \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Anche di una successione si può disegnare il grafico. Riferendoci agli esempi precedenti, possiamo osservare che le prime quattro successioni sono la restrizione ai numeri naturali di una funzione di variabile reale:

1 / n restringe ai naturali la funzione 1 / x

n / (n +1) restringe ai naturali la funzione x / (x + 1)

$\sqrt{n^2 - 25}$ restringe ai naturali $n \geq 5$ la funzione $\sqrt{x^2 - 25}$

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$ restringe ai naturali la funzione $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$

Il grafico di queste successioni è dunque ottenuto da quello delle funzioni indicate, prendendo solo i punti con ascissa naturale (nel terzo caso, quelli con ascissa naturale $n \geq 5$).

La legge che definisce la successione $(-1)^{n}$ si può estendere solo parzialmente ai razionali ($(-1)^{1/3}$ ha senso, $(-1)^{1/2}$ non ha senso) e in nessun caso agli irrazionali.

Il grafico di questa successione si può comunque tracciare senza alcuna difficoltà.

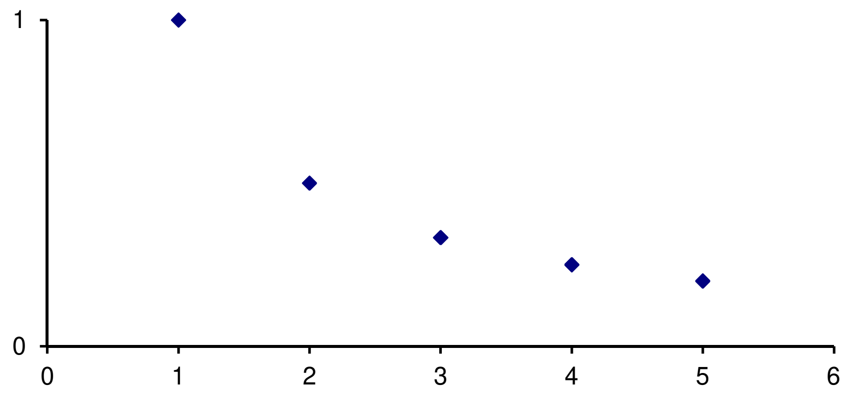
Per quanto riguarda l'ultima successione, la legge che la definisce è intrinsecamente legata ai numeri naturali e non è possibile estenderla in modo ragionevole ad altri numeri.

Generalmente, invece del grafico, possiamo limitarci a tracciare l'andamento della successione, riportandone sull'asse cartesiano alcuni termini consecutivi e cercando in questo modo di dedurre il comportamento dei termini successivi.

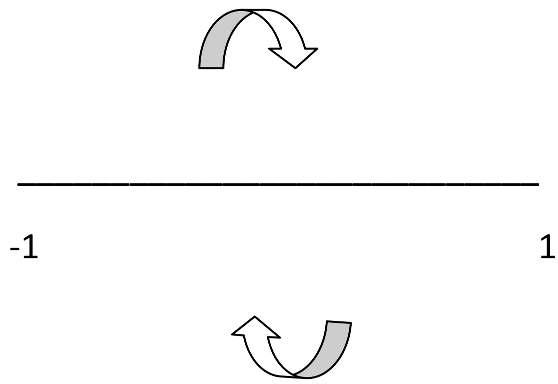
Ad esempio, l'andamento della successione 1 / n è indicato dalla figura seguente :

0 1 / 4 1 / 3 1 / 2 1

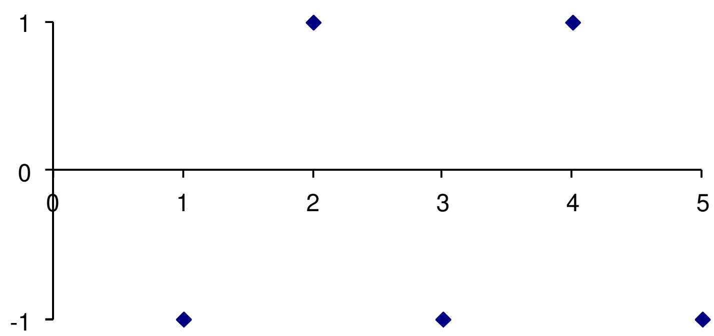
mentre il grafico della successione è dato da :



Analogamente la successione $(-1)^n$ può essere raffigurata nella forma



mentre il suo grafico è dato da



Una successione si dice **crescente** (**decrescente)** se

$$\forall n \ , \ x_{n+1} > x_n \ (x_{n+1} < x_n) \qquad (*)$$

In questo caso si parla anche di crescenza o decrescenza in senso stretto. Una successione si dice invece **crescente** (o **decrescente) in senso debole** se

$$\forall n \ , \ x_{n+1} \geq x_n \ (x_{n+1} \leq x_n)$$

Prendiamo in considerazione la definizione di successione crescente.

L'analoga definizione data per funzioni è

$$\forall x', x'' \in A \ , \ x' < x'' \Rightarrow f(x') < f(x'') \ .$$

Coerentemente con questa definizione, avremmo dovuto scrivere che una successione è crescente se

$$\forall n, m \ , \ n < m \ \Rightarrow \ x_n < x_m \ . \qquad (**)$$

Questa condizione equivale a quella data: infatti, se vale (*), confrontando ogni termine con il successivo, si ottiene: $x_n < x_{n+1} < x_{n+2} < \ldots . < x_m$, cioè la (* *). Viceversa, se vale (**) è evidente che vale anche (*) (che di (**) è un caso particolare).

Esempi

$\log \frac{n+1}{n+2}$ è crescente

$\sqrt{n^2+1}+n$ è crescente

$\sqrt{n^2+1}-n$ è decrescente.

Successioni definite per ricorrenza

Nel caso più semplice le successione definite per ricorrenza (o in modo induttivo) si scrivono nella forma

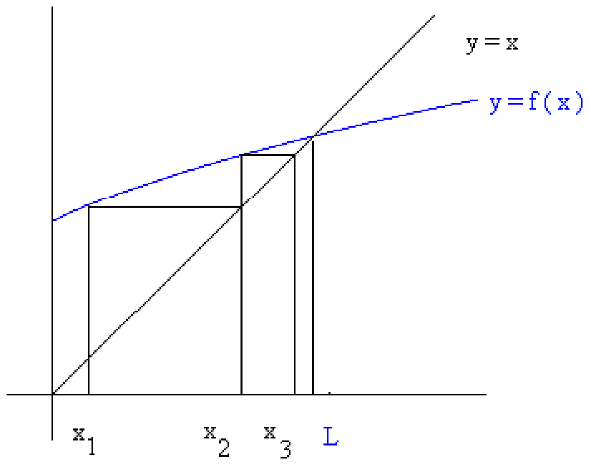
$$x_1 = \alpha$$
$$x_{n+1} = f(x_n)$$

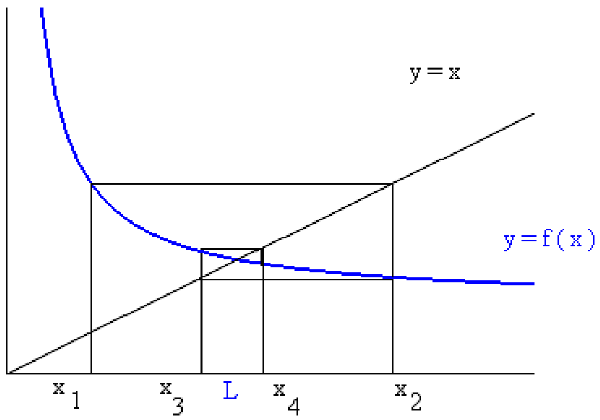
essendo f un'assegnata funzione.

In questa definizione sono dunque dati:

- il termine iniziale della successione
- una legge funzionale che, noto il termine n-esimo, permette di dedurre il termine successivo.

Nelle figure che seguono è mostrata l'interpretazione geometrica della successione in due possibili casi (nel primo si ottiene una successione crescente, nel secondo una oscillante).





Studiare una successione di questo tipo è in genere molto più difficile di quando si disponga di una formula esplicita per il termine n-esimo. Il primo problema è già quello di dimostrare che la successione sia ben definita. Questo significa che il meccanismo che genera i termini non si deve interrompere, cioè che ad ogni passo (compreso quello iniziale) il valore della successione deve cadere nel dominio della funzione generatrice f. Per esempio se la funzione f contenesse una radice quadrata, si dovrebbe controllare che al crescere di n il radicando non possa mai diventare negativo. E' chiaro che una simile verifica non può essere fatta controllando tutti i termini, ed è qui che entra in gioco il principio di induzione. Se poi vogliamo studiare il comportamento della successione, di nuovo dobbiamo ricorrere a ragionamenti induttivi.

Consideriamo la successione definita per ricorrenza da:

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)$$

i cui primi termini sono

1 $\quad$ 3 / 2 = 1,5 $\quad$ 17 / 12 = 1,4166... $\quad$ 577 / 408 = 1,4142...

- La successione è **ben definita**

Il meccanismo che, noto il termine n-esimo, permette di dedurre il successivo, si interrompe solo se ad un certo passo la successione assume il valore 0; dobbiamo dunque provare che questa possibilità non si presenta.

La verifica è fatta per induzione:

(i) per n = 1 la successione è diversa da 0 (vale 1)

(i i) se per un arbitrario n la successione è diversa da 0, tale è anche per n + 1:

$$x_n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} \neq 0$$

cioè

$$x_n \neq 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) \neq 0$$

Innanzitutto se $x_n \neq 0$, ha senso calcolare l'espressione a secondo membro. Rimane da far vedere che anche questa è $\neq 0$. La verifica è immediata. perché

$$\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_n^2 + 2 = 0$$

che non ha soluzione e questo prova l'asserto.

Con considerazioni del tutto analoghe si può precisare che è $x_n > 0$.

- La successione è **decrescente** (a partire dal secondo termine)

Occorre far vedere che

$$x_{n+1} < x_n .$$

Questo equivale a

$$\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) < x_n \quad \Leftrightarrow \quad x_n^2 > 2 \quad \Leftrightarrow \quad x_n > \sqrt{2}$$

(avendo già osservato che la successione è positiva).

Dunque, provare che la successione è decrescente equivale a provare per ogni $n \geq 2$ la disuguaglianza:

$$x_n > \sqrt{2}$$

Questa si prova ancora per induzione:

(i) per $n = 2$ è vera (infatti $x_2 = 1{,}5 > \sqrt{2}$)

(i i) $x_n > \sqrt{2} \Rightarrow x_{n+1} > \sqrt{2}$

Infatti

$$x_{n+1} > \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) > \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_n^2 - 2\sqrt{2}\, x_n + 2 > 0 \Leftrightarrow (x_n - \sqrt{2})^2 > 0.$$

In definitiva , la successione è ben definita; inoltre a partire dal secondo termine è decrescente e maggiore di $\sqrt{2}$.

Esempio 2

$$x_1 = \alpha \in [\ 0\ ,\ \pi / 2\ ] \quad , \quad x_{n+1} = \text{sen}\, x_n$$

Se $\alpha = 0$ la successione vale costantemente 0

Se $0 < \alpha \leq \pi / 2$:

- $x_n \in (0, \pi/2]$ per ogni n

La verifica per induzione non presenta difficoltà, essendo sen $x_n \leq 1 < \pi/2$

- la successione è decrescente

Infatti in $(0, \pi/2]$ si ha sen $x_n \leq x_n$.

Esempio 3

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_{n+1} = \sqrt{4 + 3x_n}$$

- La successione è ben definita

Infatti i suoi termini sono sempre strettamente maggiori di 0.

- Studiamo la monotonia della successione

$$x_{n+1} \geq x_n \iff \sqrt{4+3x_n} \geq x_n \iff$$

$$\iff x_n^2 - 3x_n - 4 \leq 0 \iff x_n \leq 4$$

La successione inizia con un valore minore di 4; se proviamo che anche tutti i termini successivi si mantengono minore di 4, possiamo dedurre che la successione è crescente.

- La successione si mantiene sempre minore di 4

Si dimostra per induzione. Poiché il primo termine verifica la condizione, basta provare che $x_n < 4 \Rightarrow x_{n+1} < 4$: la verifica non presenta difficoltà.

<u>Esempio 4</u>

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_{n+1} = 1 + (1/x_n)$$

- La successione è ben definita ed è sempre $x_n \geq 1$.

- $x_{n+1} \geq x_n \iff x_n \leq (1+\sqrt{5})/2$

Dunque provare che la successione è crescente equivale a provare che si mantiene minore di L = $(1+\sqrt{5})/2$, viceversa provare che è decrescente equivale a provare che si mantiene maggiore di L.

- $x_n < (1+\sqrt{5})/2 \iff x_{n+1} > (1+\sqrt{5})/2$

Dunque L è alternativamente minore e maggiore di L , quindi non è monotòna (cioè non è né crescente né decrescente).