

4. I numeri reali . Assioma di continuità

I numeri reali sono un campo ordinato continuo.

Definizione costruttiva del campo dei reali. Presi comunque due modelli di numeri reali, esiste tra di loro una applicazione biunivoca che conserva le operazioni e l'ordinamento.

Definizione assiomatica del campo dei numeri reali.

La proprietà di continuità o completezza dei reali corrisponde a stabilire una corrispondenza biunivoca tra i reali e i punti della retta cartesiana. Vogliamo adesso dare una versione analitica di questa proprietà.

Definizioni

Sia A un sottoinsieme non vuoto di numeri reali.

A si dice **limitato superiormente** se

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in A , x \leq M.$$

Ogni numero M che verifica la relazione sopra scritta si dice costituire un **maggiorante** dell'insieme A.

Se A possiede un maggiorante, ne possiede infiniti.

- A **non è limitato superiormente** se non è dotato di maggioranti, cioè se

$$\forall M \in \mathbb{R} , \exists \bar{x} \in A : \bar{x} > M.$$

Analogamente:

- A si dice **limitato inferiormente** se

$$\exists M \in \mathbf{R} : \forall x \in A, x \geq M.$$

Ogni numero M che verifica la relazione sopra scritta si dice costituire un **minorante** dell'insieme A.

Se A possiede un minorante, ne possiede infiniti.

- A **non è limitato inferiormente** se non è dotato di minoranti, cioè se

$$\forall M \in \mathbf{R}, \exists \bar{x} \in A : \bar{x} < M.$$

Identificando punti della retta e numeri reali, dal punto di vista geometrico i maggioranti di un insieme sono tutti i numeri " a destra dell'insieme ", i minoranti quelli " a sinistra ".

Un insieme limitato sia superiormente che inferiormente si dice **limitato**:

$$\exists m, M \in \mathbf{R} : \forall x \in A, m \leq x \leq M.$$

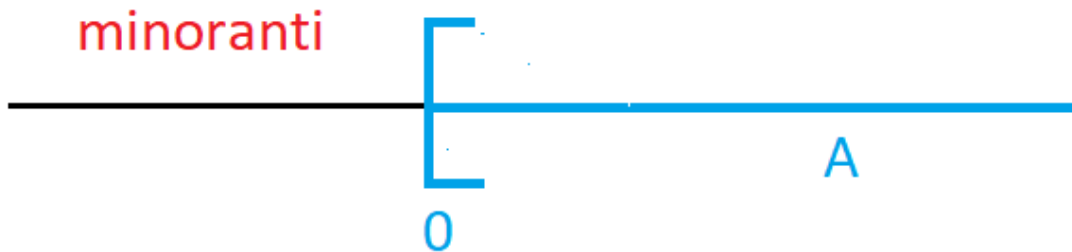
Non si confonda la nozione di insieme **limitato** con quella di insieme **finito**: un insieme formato da un numero finito di elementi è certamente limitato, ma il viceversa è generalmente falso.

Esempio 1

Sia A l'insieme \mathbf{R}^+ dei numeri reali positivi o nulli: $A = \{ x \in \mathbf{R} : x \geq 0 \}$.

A è limitato inferiormente: 0 è un minorante dell'insieme, così come ogni numero negativo.

A non è limitato superiormente: comunque si fissi un numero M, esiste almeno un numero positivo x' tale che $x' > M$ (anzi, di numeri con questa proprietà ne esistono infiniti).

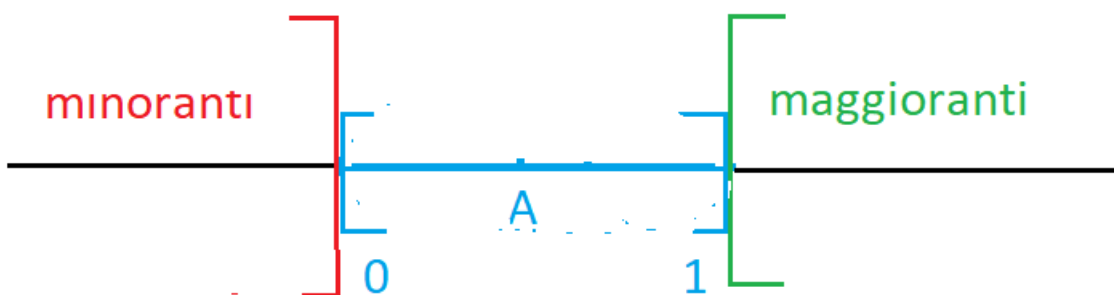


0 è il più grande minorante; 0 appartiene ad A

Esempio 2

Sia $A = \{ x \in \mathbf{R} : 0 \leq x \leq 1 \}$.

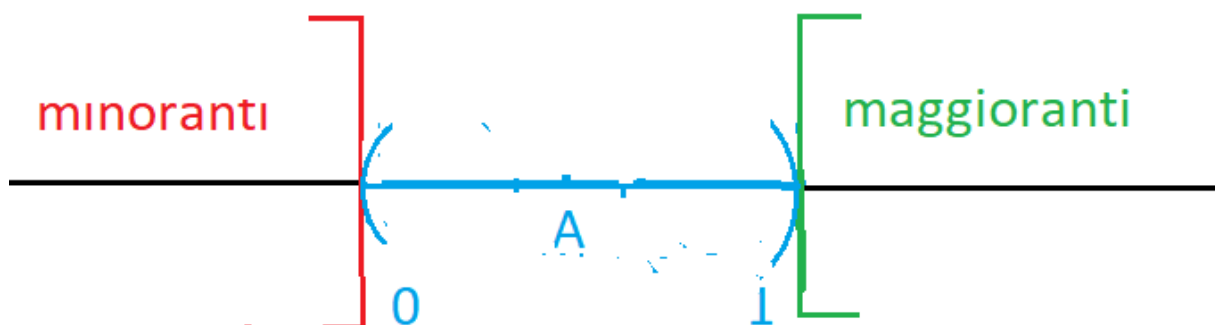
A è limitato sia superiormente (1 è il più piccolo maggiorante ed appartiene ad A) che inferiormente (0 è il più grande minorante ed appartiene ad A).



Esempio 3

Sia $A = \{ x \in \mathbf{R} : 0 < x < 1 \}$.

Valgono le stesse considerazioni fatte per l'esempio precedente. Stavolta però 0 (il più grande minorante) e 1 (il più piccolo maggiorante) non appartengono ad A.



Definizioni

- Un numero reale M si dice **massimo** dell'insieme A e si scrive $M = \max A$ se è il numero più grande tra quelli che stanno in tale insieme

$$(i) \quad \forall x \in A, x \leq M$$

$$(ii) \quad M \in A$$

Un numero reale m si dice **minimo** dell'insieme A e si scrive $m = \min A$ se è il numero più piccolo tra quelli che stanno in tale insieme

$$(i) \quad \forall x \in A, x \geq m$$

$$(ii) \quad m \in A$$

Dunque, $\max A$ è un maggiorante di A che appartiene ad A , $\min A$ un minorante di A che appartiene ad A .

Alcune proprietà del massimo e del minimo

- Il massimo e il minimo di un insieme sono univocamente determinati.

Proviamo l'affermazione per il massimo, ragionando per assurdo.

Siano dunque M ed M' due numeri distinti che verificano le proprietà (i), (ii) del massimo di uno stesso insieme A e sia $M' < M$ (per fissare le idee). Sappiamo che M' è un maggiorante di A e che M appartiene ad A , dunque deve risultare $M \leq M'$; questo contraddice l'ipotesi di partenza.

- Il massimo di un insieme è il minimo dei maggioranti,
- il minimo di un insieme è il massimo dei minoranti.

Anche in questo caso limitiamoci a provare l'affermazione per il massimo. Sappiamo già che $M = \max A$ è un maggiorante di A ; rimane da provare che è il più piccolo. Ragioniamo per assurdo, ammettendo l'esistenza di un maggiorante $M' < M$. Come sopra, essendo M' un maggiorante ed M un elemento di A , deve essere $M \leq M'$, il che contraddice l'ipotesi fatta.

- Il massimo e il minimo di un insieme possono non esistere.

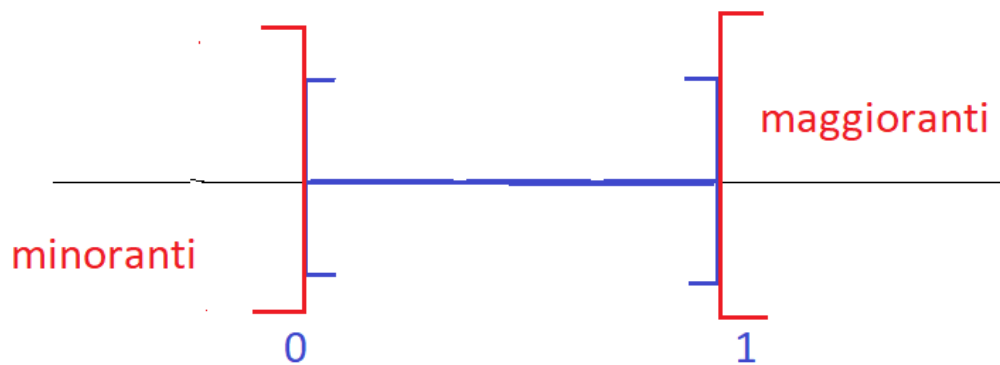
Esempio 1

L'insieme $A = \{ x: x \geq 0 \}$ non è limitato superiormente (cioè non ha maggioranti) e dunque non può avere massimo (che, come abbiamo detto, è un particolare maggiorante). L'insieme ha invece 0 come minimo (infatti, ogni elemento di A è maggiore o uguale a 0 e inoltre 0 appartiene ad A).

Esempio 2

L'insieme $A = \{ x: 0 \leq x \leq 1 \}$ è limitato e risulta $\max A = 1$, $\min A = 0$.

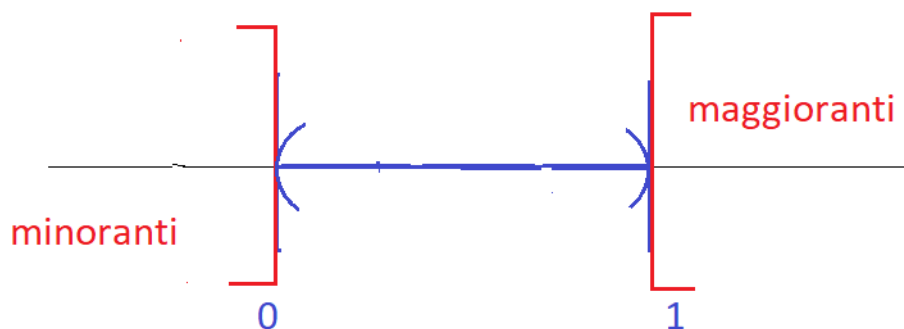
Infatti $\forall x \in A$ $0 \leq x \leq 1$; inoltre $0, 1 \in A$.



Esempio 3

L'insieme $A = \{ x: 0 < x < 1 \}$ è limitato, ma non ha né massimo né minimo.

Infatti, ad esempio per quanto riguarda il massimo, questo non può essere 1, perché 1 non appartiene all'insieme; non può essere un numero $c < 1$, perché c non sarebbe un maggiorante (tra c ed 1 si trovano infiniti elementi di A); infine non può essere un numero $c > 1$, perché c non apparterebbe ad A .



Dunque il massimo e il minimo di un insieme possono non esistere, per due motivi diversi:

- A non è limitato superiormente e quindi, non avendo maggioranti, non può avere massimo (che è un particolare maggiorante) . Analogamente, A non è limitato inferiormente e quindi, non avendo minoranti, non può avere minimo (che è un particolare minorante) .

- A è limitato superiormente, ma il minimo dei maggioranti (cioè il numero candidato ad essere il massimo) non appartiene ad A . Analogamente, A è limitato inferiormente, ma il massimo dei minoranti non appartiene ad A .

Diamo la seguente definizione **di estremo superiore ed inferiore**:

Definizione

- Sia A un insieme di numeri reali non vuoto e limitato superiormente; un numero reale L si dice **estremo superiore** di A e si scrive $L = \sup A$ se L è il minimo dei maggioranti di A , cioè se
 - (i) L è un maggiorante di A
 - (i i) ogni numero minore di L non è un maggiorante di A .

Possiamo riscrivere questa caratterizzazione nel seguente modo:

$$(i) \quad \forall x \in A, x \leq L$$

$$(ii) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{x} \in A : \bar{x} \geq L - \varepsilon$$

(essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, $L - \varepsilon$ è un generico numero minore di L ; la condizione (i i) esprime il fatto che $L - \varepsilon$ non è un maggiorante di A).

gli elementi di A stanno a sinistra di L



in questo intervallo cade almeno un numero di A

La definizione di estremo inferiore è del tutto analoga:

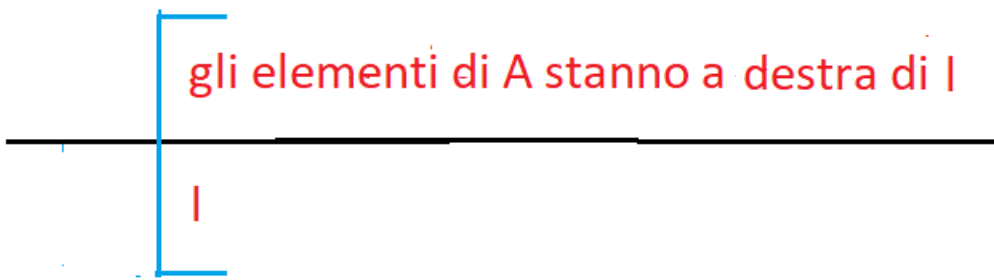
- Sia A un insieme di numeri reali non vuoto e limitato inferiormente; un numero reale l si dice **estremo inferiore** di A e si scrive $l = \inf A$ se l è il massimo dei minoranti di A , cioè se

- (i) l è un minorante di A
- (i i) ogni numero maggiore di l non è un minorante di A .

Possiamo riscrivere questa caratterizzazione nel seguente modo:

- (i) $\forall x \in A, x \geq l$
- (ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{x} \in A : \bar{x} \leq l + \varepsilon$

(essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, $l + \varepsilon$ è un generico numero maggiore di l ; la condizione (i i) esprime il fatto che $l + \varepsilon$ non è un minorante di A).



in questo intervallo cade almeno un elemento di A

Alcune proprietà dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore

- Le definizioni di $\sup A$ e di $\inf A$ **non** richiedono che questi appartengano ad A .
- Avendo definito $\sup A$ come minimo di un insieme (quello dei maggioranti di A), se esiste, è unico; analogamente $\inf A$.
- Se $M = \max A$, allora $M = \sup A$; in altre parole, un insieme dotato di massimo ha anche estremo superiore e i due numeri coincidono.

Analogamente, se $m = \min A$, allora $m = \inf A$.

Per provare quest'ultima proprietà (limitatamente al massimo), basta ricordare che il massimo di un insieme è il più piccolo dei maggioranti e che questa è proprio la definizione di estremo superiore.



E' comodo poter parlare di $\sup A$ e di $\inf A$ anche per insiemi non limitati superiormente o inferiormente (insiemi per i quali le precedenti definizioni **non** hanno senso).

A tal scopo introduciamo le seguenti notazioni:

$\sup A = +\infty$ se A non è limitato superiormente

$\inf A = -\infty$ se A non è limitato inferiormente.

Nel caso di intervalli i concetti che abbiamo definito sono immediati : \sup e \inf sono rispettivamente l'estremo più grande o più piccolo (ivi compresa la possibilità che siano infiniti); questi diventano anche \max e \min nel caso in cui appartengano all'intervallo.

Cos'è $\sup A$?

- se A non è limitato superiormente è $+\infty$.
- se A è dotato di massimo è questo massimo (cioè il più grande elemento appartenente ad A)
- se A è limitato superiormente ma non ha massimo, è il più grande valore a cui gli elementi di A si avvicinano arbitrariamente, rimanendone però strettamente minori.

Interpretazione analoga per l' \inf .

Esempio 1

L'insieme $\{ x: 0 \leq x \leq 1 \}$ ha massimo, dunque $1 = \max A = \sup A$.

Esempio 2

L'insieme $\{ x: 0 < x < 1 \}$ non ha massimo, ma $1 = \sup A$.

Infatti:

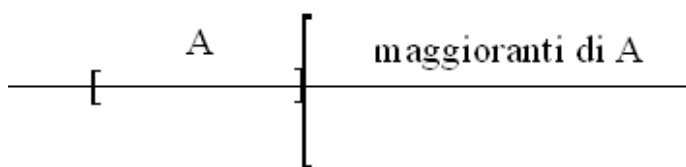
$$(i) \quad \forall x \in A, \quad x \leq 1 \quad (\text{anzi } x < 1)$$

$$(ii) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{x} \in A : \bar{x} > 1 - \varepsilon$$

(tra $1 - \varepsilon$ ed 1 ci sono infiniti elementi di A).

Visualizziamo geometricamente questi due esempi:

$$A = \{ x: 0 \leq x \leq 1 \}$$

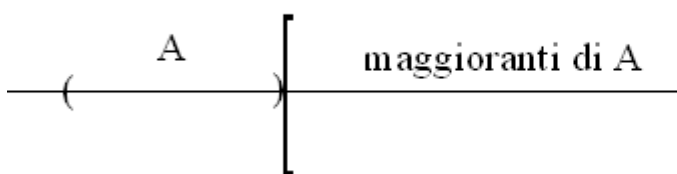


1 è il minimo dei maggioranti

1 appartiene ad A

1 è il massimo di A

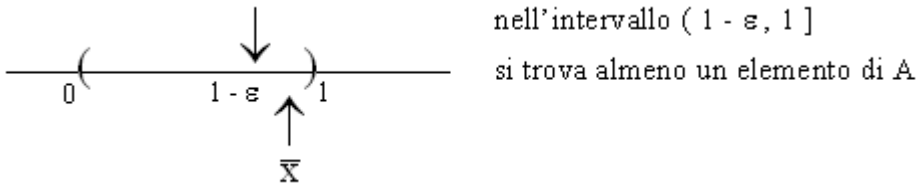
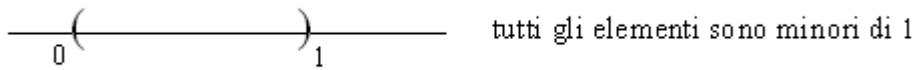
$$A = \{ x: 0 < x < 1 \}$$



1 è il minimo dei maggioranti

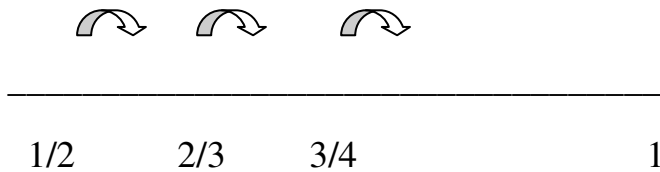
1 non appartiene ad A

1 è l'estremo superiore di A



Esempio 3

Sia $A = \{ 1/2, 2/3, 3/4, \dots, n/(n+1), \dots \} = \{ n/(n+1), n \in \mathbf{N} \}$



Gli elementi di A sono numeri razionali minori di 1, ma ad ogni passo (cioè al crescere di n) sempre più vicini ad 1.

1 **non** è massimo per A (perché 1 non appartiene ad A), ma ne è l'estremo superiore.

Infatti:

- (i) La disequazione $n / (n + 1) < 1$ è verificata qualunque sia il valore dato al naturale n cioè - come abbiamo già scritto - tutti gli elementi dell'insieme sono minori di 1 (basterebbe fossero ≤ 1);
- (i i) Fissato $\varepsilon > 0$, la disequazione

$$\frac{n}{n+1} > 1 - \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \frac{n}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

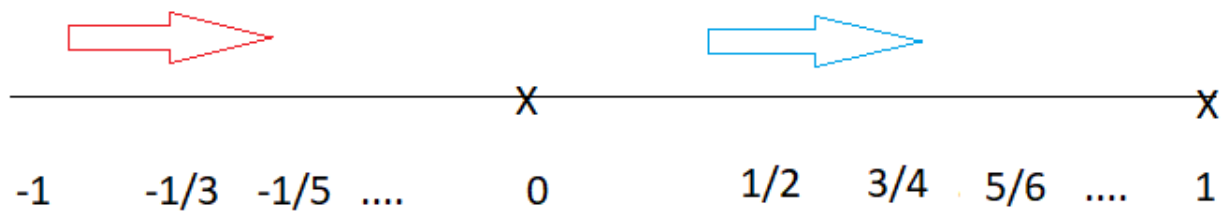
ha infinite soluzioni

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 .$$

Dunque esistono infiniti elementi di A che diventano maggiori di $1 - \varepsilon$ (ne basterebbe uno).

Esempio 4

Sia A l'insieme dei termini della successione. $x_n = \begin{cases} -1/n & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 1 - 1/n & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$



$-1 = \min = \inf$ $1 = \sup$, max non esiste

Le definizioni precedenti adattate a funzioni e successioni.

Per ogni insieme (non vuoto) di numeri reali abbiamo dato le definizioni di :

- insieme limitato superiormente o inferiormente
- massimo e minimo
- estremo superiore ed inferiore.

Queste definizioni si estendono a funzioni e a successioni : basta riscrivere quelle che già conosciamo, prendendo come insieme a cui applicarle l'immagine della funzione o della successione:

$\{ f(x), x \in A \}$ (qui A indica il dominio della funzione)

$\{ x_n, n \in \mathbb{N} \}$

La funzione f è **limitata superiormente (inferiormente)** in A se e solo se esiste un numero L (un numero l) tale che

$$f(x) \leq L \quad (f(x) \geq l) , \quad \forall x \in A .$$

$\sup f = L \in \mathbb{R}$

$$(i) \quad \forall x \in A, f(x) \leq L \quad (ii) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x' \in A: f(x') > L - \varepsilon$$

$\inf f = l \in \mathbb{R}$

$$(i) \quad \forall x \in A, f(x) \geq l \quad (ii) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x' \in A: f(x') < l + \varepsilon ;$$

$\sup f = +\infty$

$$\forall L > 0 \quad \exists x' \in A: f(x') > L$$

$$\mathbf{\inf f = -\infty}$$

$$\forall L > 0 \exists x' \in A: f(x') < -L$$

$$\mathbf{\max f = M}$$

$$\forall x \in A, f(x) \leq M$$

$$\exists x' \in A: f(x') = M$$

$$\mathbf{\min f = m}$$

$$\forall x \in A, f(x) \geq m$$

$$\exists x' \in A: f(x') = m.$$

Un punto x_0 si dice **punto di massimo** (più correttamente, **di massimo assoluto**) **per la funzione** $f(x)$ se in questo punto la funzione assume valore massimo:

$$f(x_0) = \max f$$

cioè se

$$(i) x_0 \in A$$

$$(ii) \forall x \in A, f(x) \leq f(x_0).$$

Analogamente, il punto $x_0 \in A$ si dice **punto di minimo** (**assoluto**) se

$$f(x_0) = \min f$$

cioè se

$$(i) x_0 \in A$$

$$(ii) \forall x \in A, f(x) \geq f(x_0).$$

Analogamente per le successioni.

La successione x_n è **limitata superiormente (inferiormente)** in A se e solo se esiste un numero L (un numero l) tale che

$$x_n \leq L \quad (x_n \geq l) \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

$\sup x_n = L \in \mathbb{R}$

$$(i) \quad \forall n \in \mathbb{N} , x_n \leq L$$

$$(ii) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n' \in \mathbb{N} : x_{n'} > L - \varepsilon$$

$\inf x_n = l \in \mathbb{R}$

$$(i) \quad \forall n \in \mathbb{N} , x_n \geq l$$

$$(ii) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n' \in \mathbb{N} : x_{n'} < l + \varepsilon$$

$\sup x_n = +\infty$

$$\forall L > 0 \quad \exists n' \in \mathbb{N} : x_{n'} > L$$

$\inf x_n = -\infty$

$$\forall L > 0 \quad \exists n' \in \mathbb{N} : x_{n'} < -L$$

$\max x_n = M$

$$\forall n \in \mathbb{N} , x_n \leq M$$

$$\exists n' \in \mathbb{N} : x_{n'} = M$$

$\min x_n = m$

$$\forall n \in \mathbb{N} , x_n \geq m$$

$$\exists n' \in \mathbb{N} : x_{n'} = m$$

Esercizi : Calcolare (se esistono) massimo, minimo, estremo superiore ed inferiore per gli insiemi, le successioni, le funzioni che seguono:

- $\left\{ x : \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0 \right\}$
- $x_n = |n^2 - 2n - 3|$
- $1, \overline{20} = \sup \{1,20 \ 1,2020 \ 1,202020 \ \dots\}$
- $x_n = \log(1 + e^{-n})$
- $x_n = \frac{n^2 + 4}{2n^2 + 3}$
- $x_1 = 4 \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2 + 1}{x_n + 1}}$
- $\left\{ x \in \mathbb{R} : nx^2 + 2nx + 1 = 0 \right\}$
- $x_n = \frac{9 + (1 + (-1)^n)2^n}{3^n}$
- $x_n = \sqrt{n^2 - 1} - n$
- $f(x) = \log \frac{1-x}{1+x}$
- $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$
- $f(x) = \log \frac{1}{|x^2 - x|}$
- $f(x) = x^2 - |x|$
- $f(x) = \exp(-x^2)$
- $f(x) = \operatorname{arcsen} \frac{1}{2^x}$

Negli esempi precedenti abbiamo visto insiemi A limitati superiormente (cioè dotati di maggioranti) per i quali:

- il minimo dei maggioranti esiste ed appartiene ad A : questo è il massimo di A
- il minimo dei maggioranti esiste e non appartiene ad A : è l'estremo superiore.

Non abbiamo incontrato insiemi limitati superiormente per i quali non esiste il minimo dei maggioranti. L'impossibilità di trovare insiemi di questi tipo è contenuta nell'ultimo assioma del sistema dei numeri reali:

Assioma di continuità o completezza

Per ogni insieme A (non vuoto) di numeri reali limitato superiormente esiste un numero reale L tale che $L = \sup A$.

Per ogni insieme A (non vuoto) di numeri reali limitato inferiormente esiste un numero reale l tale che $l = \inf A$.

L'assioma di continuità realizza la profonda differenza tra l'insieme \mathbf{Q} dei razionali e l'insieme \mathbf{R} dei reali, che dal punto di vista puramente algebrico hanno invece le stesse proprietà.

Prima di esaminare le conseguenze di questo assioma, proviamo che \mathbf{Q} non lo verifica. Questo significa che, se restringiamo il campo numerico ai soli razionali, non è vero che per un insieme $A \subset \mathbf{Q}$ non vuoto e limitato superiormente debba necessariamente esistere un numero razionale come estremo superiore; quello che afferma l'assioma è che tale numero esiste se allarghiamo il campo numerico dai razionali ai reali.

Per provare che \mathbf{Q} non verifica l'assioma di continuità, consideriamo l'insieme

$$A = \{ x \in \mathbf{Q}^+ : x^2 < 2 \}.$$

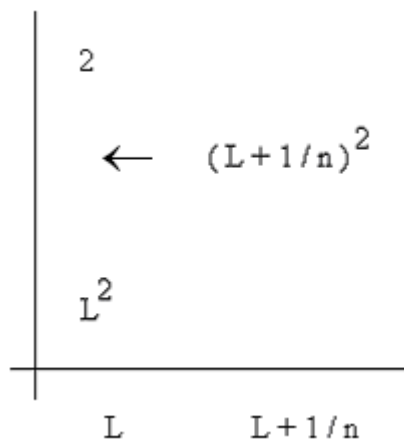
Questo insieme:

- non è vuoto ($1 \in A$)
- è limitato superiormente (2 è un maggiorante).

Se esistesse un numero razionale L tale che $L = \sup A$, potrebbe essere soltanto $L^2 < 2$ oppure $L^2 > 2$ dato che - come abbiamo visto - non esiste nessun numero razionale il cui quadrato sia 2.

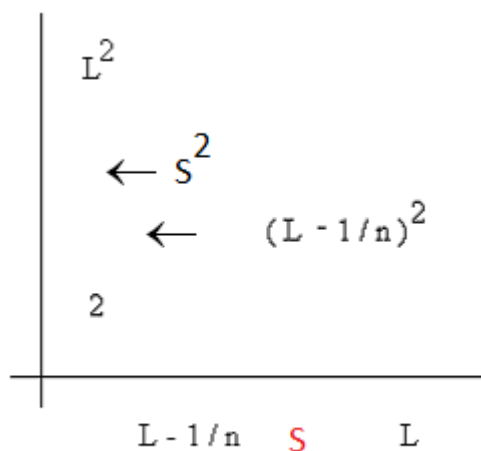
Utilizzando la caratterizzazione dell'estremo superiore, si fa vedere che entrambe le possibilità portano ad una contraddizione; in questo modo resta provato che l'insieme A non possiede (limitatamente ai razionali) estremo superiore.

(i) Supponiamo $L^2 < 2$.



Prendendo n abbastanza grande, il razionale positivo $L + (1/n)$ ha ancora quadrato minore di 2 (*). Ma allora $L + (1/n)$ risulta appartenere ad A e questo è assurdo, essendo maggiore dell'estremo superiore di A .

(i i) Supponiamo $L^2 > 2$.



Prendendo n abbastanza grande, il razionale positivo $L - (1/n)$ ha ancora quadrato maggiore di 2 (**). Ma tra $L - (1/n)$ ed L deve esistere almeno un elemento $S \in A$, cioè un razionale positivo il cui quadrato sia minore di 2.

Essendo $S^2 > (L - (1/n))^2 > 2$, arriviamo ad un assurdo.

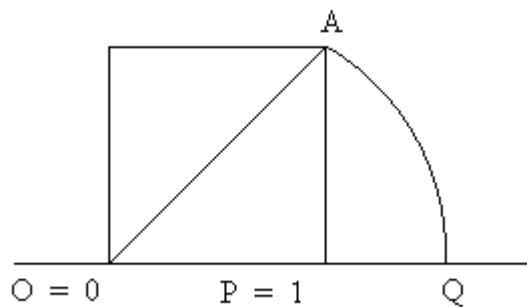
Osservazione

La verifica di (*) e (**) è molto semplice utilizzando il numero irrazionale $\sqrt{2}$. Sul libro è riportata la verifica che fa uso solo dei numeri razionali.

Dall'assioma di continuità possiamo dedurre che la distribuzione dei numeri reali sulla retta cartesiana è **continua**, cioè che esiste una corrispondenza biunivoca tra i punti della retta cartesiana e i numeri reali (nel senso che ad ogni punto della retta corrisponde uno ed un solo numero reale e viceversa).

Infatti, se P è un qualunque punto della retta, consideriamo l'insieme $A = \{ x \in \mathbf{Q} : x \text{ è ascissa di un punto a sinistra di } P \}$. A è un insieme non vuoto di numeri razionali, limitato superiormente: dunque esiste un numero reale s che di A rappresenta l'estremo superiore. Nella corrispondenza biunivoca che stiamo cercando di stabilire, s è il numero reale corrispondente al punto P , cioè l'ascissa associata al punto P .

Ripensiamo alla costruzione geometrica sintetizzata nella figura successiva:



al punto Q, ottenuto riportando sull'asse cartesiano l'estremo A della diagonale, non corrisponde alcun numero razionale. Attraverso l'assioma di continuità possiamo associare a questo punto un numero reale (non razionale) L ; abbiamo fatto vedere che non può essere $L^2 > 2$ e nemmeno $L^2 < 2$. La possibilità che fosse $L^2 = 2$ prima era stata scartata perché lavoravamo in campo razionale e sappiamo che non c'è nessun numero razionale il cui quadrato è 2. In campo reale, scartate le altre due possibilità, troviamo che deve essere proprio $L^2 = 2$, cioè L è la soluzione positiva dell'equazione $x^2 = 2$, che è comunemente indicato come $\sqrt{2}$.

L'assioma di continuità porta dunque ad allargare il sistema numerico dei razionali, introducendo i numeri irrazionali come quelli che completano la distribuzione numerica sulla retta cartesiana.

Data la corrispondenza che abbiamo stabilito, la retta cartesiana è detta anche retta reale ed è consuetudine usare indifferentemente l'espressione **numero reale** o **punto della retta**.

Esempi particolari di sottoinsiemi della retta sono gli **intervalli** (caratterizzati dal fatto che se P e Q sono due punti distinti di tale insieme, anche tutti i punti compresi tra P e Q appartengono all'insieme). Agli intervalli della retta corrispondono insiemi di numeri reali che sono detti anch'essi intervalli:

$[a, b]$ = $\{ x: a \leq x \leq b \}$ intervallo limitato chiuso

(a, b) = $\{ x: a < x < b \}$ intervallo limitato aperto

$[a, b) = \{ x: a \leq x < b \}$ intervallo limitato aperto a destra

$(a, b] = \{ x: a < x \leq b \}$ intervallo limitato aperto a sinistra

$[a, + \infty) = \{ x: x \geq a \}$ intervallo non limitato superiormente, chiuso

$(a, + \infty) = \{ x: x > a \}$ intervallo non limitato superiormente, aperto

$(- \infty, a] = \{ x: x \leq a \}$ intervallo non limitato inferiormente, chiuso

$(- \infty, a) = \{ x: x < a \}$ intervallo non limitato inferiormente, aperto.

Definizione

Due insiemi A, B non vuoti di numeri reali si dicono **contigui** se:

$$(i) \quad \forall a \in A, \forall b \in B \quad a \leq b$$

(limitatamente a questa sola proprietà, i due insiemi si dicono **separati**)

$$(i i) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{a} \in A \quad \exists \bar{b} \in B : \bar{b} - \bar{a} < \varepsilon.$$

Dunque, i due insiemi tengono separati i propri elementi (tutti i numeri di A sono a sinistra di tutti i numeri di B), ma sono tra loro vicini (si possono sempre trovare un elemento di B ed uno di A la cui distanza sia minore di una qualunque prefissata quantità positiva).

La seguente proposizione sugli insiemi contigui è una conseguenza dell'assioma di continuità (in realtà, è **equivalente all'assioma**).

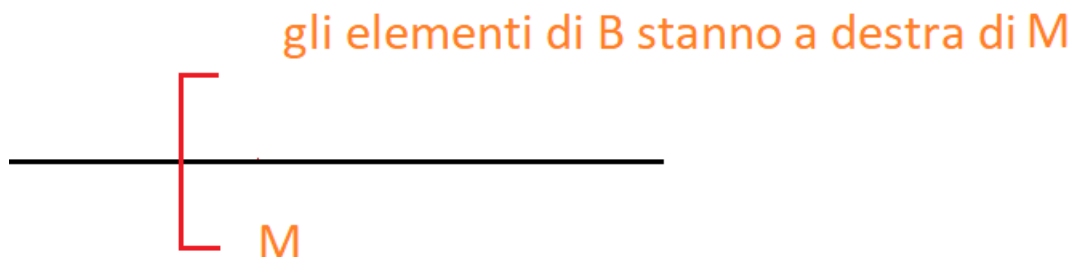
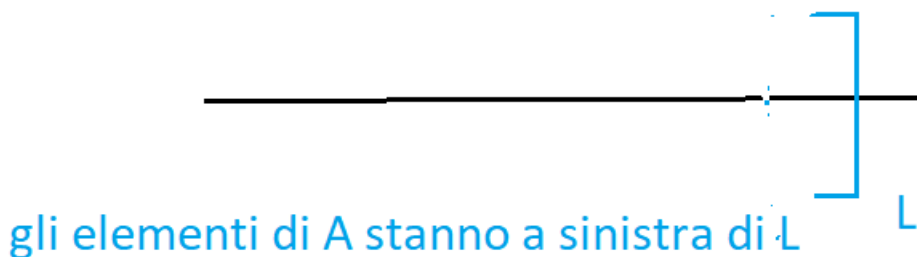
Proposizione

Due insiemi contigui hanno uno ed un solo **elemento di separazione**, cioè un numero ξ tale che $\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq \xi \leq b$.

dimostrazione

A è limitato superiormente (ogni elemento di B ne è un maggiorante), B è limitato inferiormente (ogni elemento di A ne è un minorante).

Esistono dunque due numeri reali L, M tali che $L = \sup A$, $M = \inf B$.

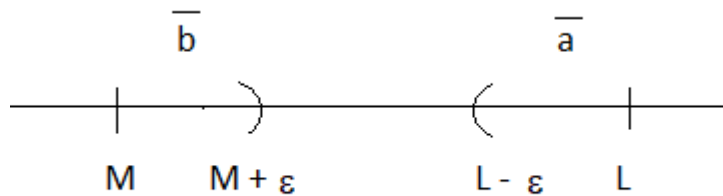


- Non può essere $L > M$

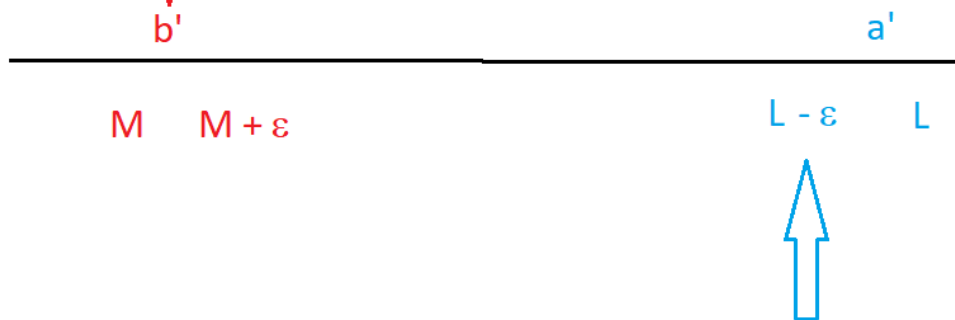
Altrimenti, scelto $\varepsilon = (L - M) / 3$, per le proprietà dell'estremo superiore ed inferiore esisterebbero

$$a' \in A, b' \in B : a' > L - \varepsilon, b' < M + \varepsilon.$$

Ma allora sarebbe $a' > b'$, contrariamente all'ipotesi (i) degli insiemi contigui.



per le proprietà di $\inf B$, qui deve cadere almeno un elemento di B



per le proprietà di $\sup S$ qui deve cadere almeno un elemento di A

- Non può essere $L < M$

In caso contrario, poiché è sempre $a \leq L$ e $b \geq M$, la distanza tra un qualunque elemento di B ed un qualunque elemento di A sarebbe maggiore o uguale ad $M - L$ e dunque, scelto $\varepsilon < M - L$, la proprietà (i) degli insiemi contigui non sarebbe verificata.

gli elementi di B stanno a destra di M



gli elementi di A stanno a sinistra di A

la distanza tra un elemento di B ed uno di A
non potrebbe mai essere inferiore a $M - L$

Dunque è necessariamente $L = M$; questo numero S è di separazione tra A e B , dato che ogni numero di A è minore o uguale dell'estremo superiore S ed ogni numero di B è maggiore o uguale dell'estremo inferiore S .

S è l'unico elemento di separazione. Infatti, se esistessero due distinti elementi di separazione $S < S'$, la distanza tra gli elementi di A e di B non sarebbe minore di $S' - S$ e dunque sarebbe contraddetta la proprietà (ii) degli insiemi contigui.



Rappresentazione decimale dei numeri reali

Consideriamo adesso un qualunque numero reale x . Se x non è un intero, è compreso tra due interi consecutivi; sintetizziamo le due possibilità, scrivendo che esiste $a_0 \in \mathbf{Z}$ tale che:

$$a_0 \leq x < a_0 + 1.$$

L'intervallo così individuato può essere diviso in 10 parti uguali. Se x non è uno dei punti della suddivisione, si trova tra due di questi consecutivi:

$$a_0 + \frac{a_1}{10} \leq x < a_0 + \frac{a_1 + 1}{10}, \text{ per un opportuno } a_1 \in \{0, 1, \dots, 9\}.$$

Possiamo poi suddividere ulteriormente questo nuovo intervallo in 10 parti uguali (ciascuno di ampiezza $1/100$) e continuare il procedimento. Se dopo un numero finito di passi x coincide con uno dei punti di suddivisione, è un numero decimale finito; in caso contrario il procedimento continua indefinitamente, generando un numero intero a_0 ed un insieme infinito di naturali $a_1 \in \{0, 1, \dots, 9\}$. In questo caso diciamo che x ha una rappresentazione decimale infinita

$$x = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

Riassumendo le due possibilità, possiamo affermare che ogni numero reale ha una rappresentazione decimale finita o infinita.

Al passo n -esimo x verifica le disuguaglianze

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}$$

Queste forniscono due approssimazioni di x con un numero decimale finito, una per difetto e l'altra per eccesso; in entrambi i casi l'errore nell'approssimazione (cioè la differenza tra il valore esatto e quello approssimato) è minore di 10^{-n} .

Con un numero sufficiente di passi, cioè prendendo n sufficientemente grande, possiamo rendere l'errore minore di una qualunque prefissata quantità positiva ε .

Perché questo accada, deve essere $10^{-n} < \varepsilon$ cioè $10^n > 1/\varepsilon$, ed essendo $10^n > n$, basterà ad esempio prendere $n > 1/\varepsilon$ (ovviamente, risolvendo la disequazione troveremmo $n > \log_{10} 1/\varepsilon$).

Questo significa che i due insiemi di numeri decimali sono contigui e perciò hanno un unico elemento di separazione, necessariamente dato proprio da x , che dunque risulta essere l'estremo superiore del primo insieme e l'estremo inferiore del secondo.

Consideriamo ad esempio il numero $\sqrt{2}$, definito come $\sup \{ x \in \mathbb{Q}^+ : x^2 < 2 \}$ ovvero come soluzione positiva dell'equazione $x^2 = 2$:

$$\begin{array}{l} 1 < \sqrt{2} < 2 & 1^2 < 2 < 2^2 \\ 1,4 < \sqrt{2} < 1,5 & \text{perché } 1,4^2 < 2 < 1,5^2 \\ 1,41 < \sqrt{2} < 1,42 & 1,41^2 < 2 < 1,42^2 \end{array}$$

Riassumendo, ogni numero reale individua ed è individuato da due classi contigue di numeri decimali, di cui rappresenta l'elemento di separazione.

Nella precedente costruzione possiamo anche limitarci a considerare le sole approssimazioni per difetto. In questo caso ogni numero reale individua ed è individuato da un insieme di numeri decimali, di cui rappresenta l'estremo superiore. Si sintetizza questo risultato dicendo che i numeri reali sono allineamenti decimali infiniti, i numeri razionali corrispondendo a quelli periodici.

Questi allineamenti decimali ovvero queste classi contigue di numeri decimali costituiscono due " modelli ", due " rappresentazioni concrete " dei numeri reali. L'uno o l'altro di questi modelli può essere assunto come punto di partenza per una teoria **costruttiva** dei numeri reali (in alternativa alla teoria assiomatica da noi seguita).

In altre parole, la teoria costruttiva prende l'uno o l'altro modello come definizione dei numeri reali, vi definisce due operazioni di somma e prodotto e un ordinamento, verifica che queste operazioni e questo ordinamento soddisfano le proprietà 1 – 12 (che invece noi abbiamo assunto come assiomi, cioè come punto di partenza).

In questo modo la teoria costruisce più modelli del sistema dei numeri reali: rimane da dimostrare che questi diversi modelli sono isomorfi tra loro (cioè che esiste tra due ciascuno di essi una corrispondenza biunivoca che conserva operazioni e ordinamento).

Cenni sulla cardinalità degli insiemi infiniti

Osservazione di Galileo sulla corrispondenza biunivoca tra numeri naturali e numeri pari.

L'opera di Cantor: gli insiemi infiniti sono quelli che si possono mettere in corrispondenza biunivoca con un loro sottoinsieme proprio, la cardinalità di un insieme infinito, \mathbb{N} e \mathbb{Q} hanno la stessa cardinalità (del numerabile) , \mathbb{R} ha una cardinalità maggiore (del continuo) nel senso che nessuna applicazione da \mathbb{N} a \mathbb{R} può essere surgettiva.