Un'osservazione sull'assioma di continuità.

Per provare che **Q** non verifica l'assioma di continuità, consideriamo l'insieme

$$A = \left\{ x \in Q^+ \ : \ x^2 < 2 \right\}.$$

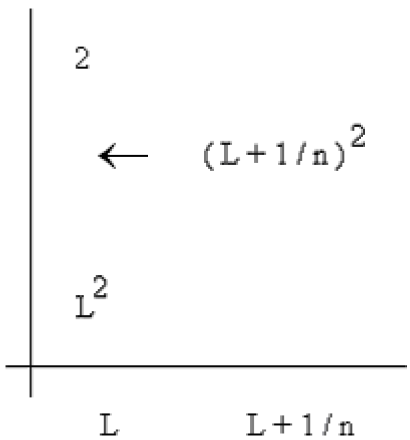
Questo insieme:

- non è vuoto ($1 \in A$)
- è limitato superiormente (2 è un maggiorante).

Se esistesse un numero <u>razionale</u> L tale che L = sup A, potrebbe essere soltanto $L^2 < 2$ oppure $L^2 > 2$ dato che - come abbiamo visto - non esiste nessun numero razionale il cui quadrato sia 2.

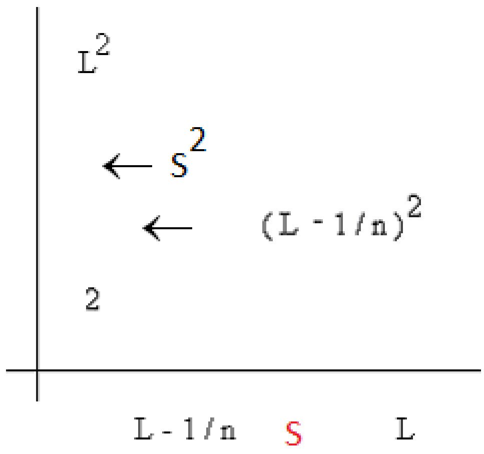
Utilizzando la caratterizzazione dell'estremo superiore, si fa vedere che entrambe le possibilità portano ad una contraddizione; in questo modo resta provato che l'insieme A non possiede (<u>limitatamente ai razionali</u>) estremo superiore.

(i) Supponiamo $L^2 < 2$.



Prendendo n abbastanza grande, il razionale positivo L + (1 / n) ha ancora quadrato minore di 2 (*). Ma allora L + (1 / n) risulta appartenere ad A e questo è assurdo, essendo maggiore dell'estremo superiore di A.

(i i) Supponiamo $L^2 > 2$.



Prendendo n abbastanza grande , il razionale positivo $L - (1/n)$ ha ancora quadrato maggiore di 2 (**). Ma tra $L - (1/n)$ ed L deve esistere almeno un elemento $S \in A$, cioè un razionale positivo il cui quadrato sia minore di 2.

Essendo $S^2 > (L - (1/n))^2 > 2$, arriviamo ad un assurdo.

La verifica di (*) e (**) è molto semplice utilizzando il numero irrazionale $\sqrt{2}$.

Il senso dell'osservazione è però quello di lavorare solo con i numeri razionali. I calcoli che seguono mostrano come procedere in questo senso.

(*) Supponiamo $L^2 < 2$.

$$\left(L + \frac{1}{n} \right)^2 < 2 \quad \Leftrightarrow \quad L^2 + \frac{1}{n^2} + \frac{2L}{n} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n^2} + \frac{2L}{n} < 2 - L^2$$

Ma $\frac{1}{n^2} + \frac{2L}{n} < \frac{1}{n} + \frac{2L}{n}$ e dunque se imponiamo che sia $\frac{1}{n} + \frac{2L}{n} < 2 - L^2$, la disequazione che dobbiamo risolvere è verificata a più forte ragione. Basta dunque prendere un qualunque $n > \frac{1 + 2L}{2 - L^2}$.

(*) Supponiamo $L^2 > 2$.

$$\left(L - \frac{1}{n} \right)^2 > 2 \iff L^2 + \frac{1}{n^2} - \frac{2L}{n} > 2 \iff \frac{2L}{n} - \frac{1}{n^2} < L^2 - 2$$

Ma $\frac{2L}{n} - \frac{1}{n^2} < \frac{2L}{n}$ e dunque se imponiamo che sia $\frac{2L}{n} < L^2 - 2$, la disequazione che dobbiamo risolvere è verificata a più forte ragione. Basta dunque prendere un qualunque $n > \frac{2L}{L^2 - 2}$.

Osservare come in entrambi i casi siamo intervenuti sul termine $1/n^2$ in modo da passare ad una disequazione di primo grado che non fa intervenire $\sqrt{2}$.

Riassumendo , l'insieme $A = \{ x \in Q^+ : x^2 < 2 \}$ in campo razionale non ha estremo superiore, quantità che invece esiste in campo reale. Ripetendo i ragionamenti precedenti, si ottiene che il quadrato di questo numero non può essere né maggiore né minore di 2. In campo razionale non esisteva un'alternativa e questo ci ha permesso di concludere con la non esistenza dell'estremo superiore . In campo reale (in cui l'estremo superiore esiste per l'assioma di continuità) possiamo invece concludere che deve essere $L^2 = 2$ e quindi L <u>definisce</u> un numero reale che come consuetudine chiamiamo $\sqrt{2}$.