Continuità della funzione senx

Dobbiamo provare che, fissato $x_0 \in R$, si ha

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0$$

ovvero

$$\lim_{x \to x_0} (\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0) = 0$$

ovvero ancora

$$\lim_{x \to x_0} | \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0 | = 0 .$$

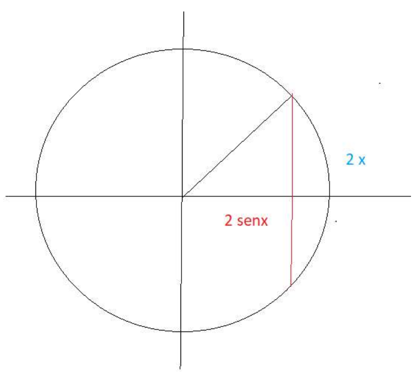
Se facciamo il cambiamento di variabile $x - x_0 = h$, possiamo riscrivere

$$\lim_{h \to 0} | \operatorname{sen}(x_0 + h) - \operatorname{sen} x_0 | = 0 .$$

Dimostreremo il risultato in due modi diversi: la prima dimostrazione fa uso delle formule trigonometriche di prostaferesi, la seconda delle formule trigonometriche di somma. In entrambi i casi utilizzeremo il teorema del confronto. Inoltre ci serviranno due maggiorazioni ed è proprio da queste che iniziamo.

Maggiorazione 1: $\forall\, x \in R \;, | \operatorname{sen} x | \leq | x |$

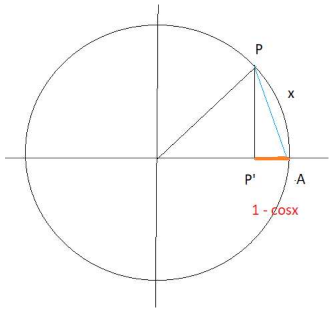
Possiamo limitarci a considerare le x positive (il valore assoluto non distinue tra x e –x) e riscrivere $| \operatorname{sen} x | \leq x$; inoltre possiamo supporre $x < \pi/2$ (se $x \geq \pi/2$ la maggiorazione è sicuramente vera, perché il primo membro al massimo vale 1). Per $0 < x < \pi/2$, possiamo riscrivere $\operatorname{sen} x \leq x$, la cui verifica è immediata non appena si consideri la figura successiva:



(la lunghezza della corda è minore di quella dell'arco di circonferenza).

Maggiorazione 2 : $\forall\, x \in (-\pi/2 , \pi/2) \;, 1 - \cos x \leq | x |$

Possiamo limitarci a supporre $0 < x < \pi/2$ e riscrivere $1 - \cos x \le x$. Si consideri la figura successiva :



Nel triangolo PP'A il cateto P'A (che misura $1 - \cos x$) ha lunghezza minore dell'ipotenusa PA e questa ha lunghezza minore di x (confronto tra corda e arco).

Dimostrazione #1 della continuità della funzione seno.

$$\left| \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0 \right| = 2 \left| \operatorname{sen} \frac{x - x_0}{2} \right| \left| \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \le \left| x - x_0 \right|$$

La conclusione segue dal teorema del confronto.

(L'uguaglianza è una formula di prostaferesi; abbiamo maggiorato il seno con la maggiorazione 1 , il coseno con 1) .

Dimostrazione #2 della continuità della funzione seno.

$$\left| \operatorname{sen}(x_0 + h) - \operatorname{sen} x_0 \right| = \left| \operatorname{sen} x_0 \cosh + \cos x_0 \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x_0 \right| =$$

$$= (1 - \cosh) \left| \operatorname{sen} x_0 \right| + \left| \cos x_0 \right| \left| \operatorname{sen} h \right|$$

Possiamo supporre $h > 0$ e , dato che tende a 0, $< \pi/2$.

L'espressione precedente può essere maggiorata come indicato :

$$\le \left(\left| \operatorname{sen} x_0 \right| + \left| \cos x_0 \right| \right) h \quad .$$

(Abbiamo utilizzato entrambe le maggiorazioni studiate) . La conclusione segue dal teorema del confronto.