Limiti notevoli

- $$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x} = e$$

limite storico; ne riparleremo in una prossima lezione

- $$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x} = e$$

cambiamento di variabile t = - x →+∞ ; ci riconduciamo a calcolare

$$\lim_{t \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{t} \right)^{-t} = e$$

$$\left(1 - \frac{1}{t} \right)^{-t} = \left(\frac{t-1}{t} \right)^{-t} = \left(\frac{t}{t-1} \right)^{t} = \left(\frac{t-1+1}{t-1} \right)^{t} = \left(1 + \frac{1}{t-1} \right)^{t} = \left(1 + \frac{1}{t-1} \right)^{t-1+1} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{t-1} \right)^{t-1} \left(1 + \frac{1}{t-1} \right) \to e \cdot 1 = e$$

- $$\lim_{x \to 0} \left(1 + x \right)^{1/x} = e$$

cambiamento di variabile $t = 1/x \to 0$

- $$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1 + x)}{x} = \log_a e = 1 / \log a$$

si prende il logaritmo della funzione precedente

- $$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \log e = 1$$

caso particolare del limite precedente

- $$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

si pone $a^x - 1 = t \to 0$ e dunque $x = \log_a(1 + t)$; si ottiene il limite inverso del precedente.

- $$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

Possiamo riscrivere la funzione nella forma:

$$\frac{e^{\alpha \log(1+x)} - 1}{x} = \frac{e^{\alpha \log(1+x)} - 1}{\alpha \log(1+x)} \; \frac{\log(1+x)}{x} \; \alpha .$$

Il secondo fattore tende a 1; nel primo fattore si pone $\alpha \log(1 + x) = t$ ed in questo modo si ottiene $\lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1.$

- $$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad (a > 1 , \; \alpha > 0)$$

La dimostrazione più semplice fa uso del teorema dell'Hôpital e sarà presentata in una lezione successiva. Memorizzeremo il risultato dicendo che gli esponenziali sono infiniti più forti delle potenze.

- $$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\log_a x)^p}{x^\alpha} = 0 \qquad (a > 1,\ \alpha > 0)$$

Posto $\log_a x = t$, si ottiene

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t^p}{(a^t)^\alpha} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^p}{(a^\alpha)^t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^p}{b^t} = 0.$$

Infatti, essendo $b > 1$, il limite è l'inverso del precedente. Memorizzeremo il risultato dicendo che i logaritmi sono infiniti più deboli delle potenze.

- $$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \left| \log_a x \right|^p = 0 \qquad (a > 1,\ \alpha, p > 0)$$

Posto $t = 1 / x$, si ottiene il limite per $t \to +\infty$ di $\left| \log_a t \right|^p / t^\alpha$ che vale 0.

- $$\lim_{x \to -\infty} \left| x \right|^\alpha e^{px} = 0 \qquad (\alpha, p > 0)$$

Posto $t = - x$, si ottiene il limite per $t \to +\infty$ di t^α / e^{pt} che vale 0.

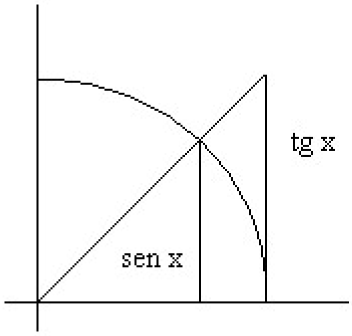
- $$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

Poiché la funzione è pari, basta studiare il limite destro e quindi restringere il dominio all'intervallo $(0, \pi / 2)$, in modo che valga $\text{sen } x < x < \text{tg } x$ (si veda la figura successiva). Dividendo per $\text{sen } x$, si ottiene

$$1 < x / \text{sen } x < 1 / \cos x$$

e dunque

$\cos x < \operatorname{sen}x / x < 1.$



Passando al limite per $x \to 0$ e utilizzando il teorema del confronto, si ottiene il risultato richiesto.

- $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per $1 + \cos x$ (localmente diverso da 0), si trova:

$$\frac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^2 \frac{1}{1 + \cos x} \to \frac{1}{2} .$$

Esercizi (svolti nel file 7a)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-5}\right)^{x+2} = e^2$$

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{2x-\pi}{3\cos x} = -2/3$$

$$\lim_{x\to 0}\exp\frac{\operatorname{sen} 2x}{1-\cos x} \quad \text{non esiste}$$

$$\lim_{x\to 0} 2x \operatorname{sen}\frac{2\pi}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\log x}\right)^{\log x} = e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2x+1)^5-1}{e^{\operatorname{sen} x}-1} = 10$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+x^2-1}{x^3+\log^2 x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x+1-\cos x}{e^x-1+x^2} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-2^x}{x^x} = 0$$

$$\lim_{x\to 1} x^{3/(x-1)} = e^3$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\operatorname{sen} x}{x-3\operatorname{sen} x} = -1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 3x}{x^2} = 5/2$$

Altri esercizi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}x}{\mathrm{tg}3x} = 1/3$$

$$\lim_{x\to \pi/6} \frac{\sqrt{3} - 2\cos x}{\pi - 6x} = -1/6$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+5}{x} \right)^x = e^5$$

$$\lim_{x\to +\infty} x \log\left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = 0$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - 1}{x-1} = 1.$$