Calcolo di limiti con il principio di sostituzione

1. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x + 1 - \cos x}{e^x - 1 - \lg(1+x^2)} = 1$

$\operatorname{sen} x \sim x \qquad e^x - 1 \sim x$

$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \qquad \lg(1+x^2) \sim x^2$

$f(x) \sim \dfrac{x}{x} \to 1$

2. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x + 1 - \cos x}{(1+x^2)^3 - 1} = \frac{1}{2}$

$\operatorname{sen}^2 x \sim x^2 \qquad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

$(1+x^2)^3 - 1 \sim 3x^2$

$f(x) \sim \dfrac{\frac{3}{2}x^2}{3x^2} \to \frac{1}{2}$

3. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x + x^2}{e^{2x} - \sqrt{1+x}} = \frac{4}{3}$

$\operatorname{sen} x \sim x \quad \operatorname{tg} x \sim x$

$e^{2x} \sim 1 + 2x \qquad \sqrt{1+x} \sim 1 + \frac{1}{2}x$

$f(x) \sim \dfrac{2x}{\frac{3}{2}x} \to \frac{4}{3}$

4. $\lim_{x \to 0} \dfrac{(4 - e^x)\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x + \lg(1 + \operatorname{sen}^2 x)}{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt[4]{1+x} + 1)} = 4$

$(4 - e^x)\operatorname{sen} x \sim 3x \qquad \operatorname{tg} x \sim x \qquad \lg(1 + \operatorname{sen}^2 x) \sim x^2$

$\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x \qquad \sqrt[4]{1+x} + 1 \sim 2$

$f(x) \sim \dfrac{4x}{x} \to 4$

5. $\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{1/x} - \cos 1/x\right) = \frac{3}{2}$

$e^{1/x} \sim 1+\frac{1}{x}$ $\qquad \cos\frac{1}{x} \sim 1-\frac{1}{2x^2}$

$f(x) \sim x \cdot \frac{3}{2x^2} \to 0$

6. $\lim_{x\to 0^+} \frac{(5x+1)^{10}-1}{(e^{\sqrt{x}}-1)\,\mathrm{sen}\sqrt{x}} = 50$

$(5x+1)^{10}-1 \sim 50x$

$e^{\sqrt{x}}-1 \sim \sqrt{x}$ $\qquad \mathrm{sen}\sqrt{x} \sim \sqrt{x}$

$f(x) \sim \frac{50x}{x} \to 50$

7. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+x^3-1}{x^3+3+\lg x} = +\infty$

$x^4+x^3-1 \sim x^4$ $\qquad f(x) \sim x^4/x^3 = x \to +\infty$

$x^3+3+\lg x \sim x^3$

8. $\lim_{x\to+\infty} \left(2-\frac{1}{x}\right)\lg x - \lg x^3 = -\infty$

$\left(2-\frac{1}{x}\right)\lg x \sim 2\lg x$ $\qquad \lg x^3 = 3\lg x$

$f(x) \sim -\lg x$

9. $\lim_{x\to+\infty} e^x - x^3 + 3\,\mathrm{sen}\,x = +\infty$

$e^x - x^3 + 3\,\mathrm{sen}\,x \sim e^x \to +\infty$

10. $\lim_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) \lg^3 x - 3^x = -\infty$

$\left(2 - \frac{1}{x}\right) \lg^3 x \sim 2 \lg^3 x$

$f(x) \sim 2 \lg^3 x - 3^x \sim -3^x \to -\infty$

11. $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^3 + x + 1} - 2x\sqrt{x} = -\infty$

$f(x) \sim x\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} = -x\sqrt{x} \to -\infty$

12. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x \lg^4 x + \cos x}{\sqrt{1 + x^2 + \lg^4 x}} = +\infty$

$f(x) \sim \frac{x^2}{x} = x \to +\infty$

13. $\lim_{x \to -\infty} \frac{5x + 7}{\sqrt{x^2 + 4}} = -5$

$f(x) \sim \frac{5x}{-x} \to -5$

14. $\lim_{x \to -\infty} x^2 e^x = 0$

$t = -x \to +\infty \quad t^2 e^{-t} = \frac{t^2}{e^t} \to 0$.

15. Ordinare in ordine crescente di infinito per $x \to +\infty$:

$$e^{x^3} \quad e^{3x} \quad e^{x^3 \lg x} \quad e^{(\lg x)^2} \quad x^5 (\lg x)^2 \quad x^x$$

Riscriviamo tutte le fx. in forma esponenziale :

$$x^5 (\lg x)^2 = e^{\lg (x^5 (\lg x)^2)} = e^{\lg x^5 + \lg (\lg x)^2}$$

$$= e^{5 \lg x + 2 \lg \lg x} \sim e^{5 \lg x}$$

$$x^x = e^{x \lg x}$$

Confrontiamo gli esponenti :

$$x^3 \quad 3x \quad x^3 \lg x \quad (\lg x)^2 \quad 5 \lg x \quad x$$

Ordiniamoli in modo crescente di infinito

$$5 \lg x \quad (\lg x)^2 \quad x \quad 3 x \quad x^3 \quad x^3 \lg x .$$