Limite di una successione

Poiché una successione è una particolare funzione **N** → **R** e poiché **N** ha come unico punto di accumulazione + ∞, l'unico limite che ha senso definire per essa è quello per $n \to +\infty$.

La scrittura

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = L \in \overline{\mathbf{R}}$$

o, più comunemente

$$x_n \to L \in \overline{R},$$

coerentemente con la definizione generale di limite significa:

$$\forall\ U(L)\ \exists\ V(+\infty) : \forall n \in N \cap V(+\infty),\ x_n \in U(L).$$

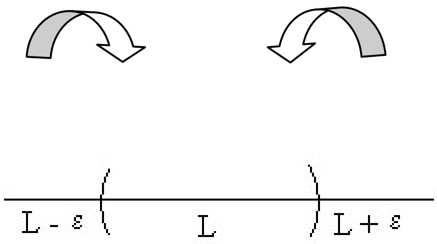
Poiché gli intorni di + ∞ sono le semirette $(M, +\infty)$, **N** ∩ V (+∞) è l'insieme di tutti i naturali maggiori di un opportuno numero.

Possiamo dunque riscrivere la definizione nella forma

$$\forall\ U(L)\ \exists\ \overline{n} : \forall n > \overline{n},\ x_n \in U(L).$$

In generale, una proprietà che, come la precedente, è verificata da tutti i naturali maggiori di un opportuno numero si dice che é verificata **definitivamente.** La definizione di limite di una successione può dunque essere sinteticamente riscritta nella forma:

$\forall\ U(L)\ ,\ x_n \in U(L)$ definitivamente.

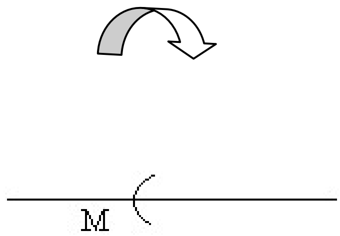


Nel caso $x_n \to L$

i termini della successione

cadono nell'intervallo fissato

da un certo indice in poi



Nel caso $x_n \to +\infty$

i termini della successione

cadono nella semiretta fissata

da un certo indice in poi.

Una successione si dice **convergente** se è dotata di limite finito, **divergente** se è dotata di limite infinito, **regolare** se è dotata di limite.

In quanto alle proprietà, valgono le stesse delle funzioni: unicità, restrizioni, permanenza del segno, comportamento rispetto alle operazioni algebriche, forme indeterminate, principio di sostituzione.

Per quanto riguarda le restrizioni, queste prendono il nome di **sottosuccessioni** o **successioni estratte** .

Data una successione x_n , una sua sottosuccessione è quello che si ottiene quando si scartano alcuni termini, lasciandone infiniti; è cioè la restrizione ad un insieme infinito di N.

Se ad esempio scegliamo di scartare tutti i termini di indice pari e lasciare solo quelli di indice dispari, dalla successione

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad \ldots\ldots$

si ottiene la sottosuccessione

$x_1 \quad x_3 \quad x_5 \quad \ldots\ldots$

Ad esempio:

data la successione $(- 1)^n / n$, scriviamo alcuni dei suoi primi termini :

-1   1/2   -1/3   1/4   -1/5   1/6   -1/7   …..

Se prendiamo solo i termini con indici dispari, otteniamo la sottosuccessione

-1   -1/3   -1/5   -1/7   …..

Se invece prendiamo solo i termini con indici pari:

1/2   1/4   1/6   1/8   …..

In modo formale, prendere una sottosuccessione vuol dire fissare una successione k_n crescente di naturali (fornisce gli indici che decidiamo di scegliere; ad es. i pari) e scrivere la successione x_{k_n} .

Coerentemente con i risultati trovati per le funzioni, avremo dunque i seguenti risultati.

Caratterizzazione del limite di una funzione di variabile reale attraverso il limite di successioni (come di consueto, A indica il dominio della funzione f) :

- $$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall x_n \in A - \{x_0\} \ , \ x_n \to x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to L$$

Ad esempio:

da $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x / x = 1$, segue n sen 1/n $\to 0$.

Più banalmente:

- **se una successione restringe ad N una funzione f (x) di variabile reale che ha limite L per $x \to +\propto$, anch'essa tende ad L.**

Ad esempio, la successione $x_n = (1 - n) / n$ tende a -1, così come la funzione $f(x) = (1 - x) / x$ tende a - 1 per $x \to +\infty$.

In pratica il teorema di caratterizzazione del limite di una funzione attraverso delle successioni è utile per dedurre dal limite di una funzione quello di una successione. Il viceversa è utile come strumento per provare che il limite di una funzione non esiste.

Ad esempio, per provare che $\lim_{x\to+\infty}$ senx non esiste, possiamo prendere due successioni che tendono a $+\infty$ sulle quali il comportamento della funzione è diverso.

- **se una successione ha limite L, ogni sua sottosuccessione ha lo stesso limite**

- **se da una successione si possono estrarre due sottosuccessioni con limiti diversi, la successione non ha limite**

- **se da una successione si possono estrarre due sottosuccessioni con lo stesso limite L e se gli indici utilizzati per costruirle esauriscono l'insieme N dei naturali (escluso al più un sottoinsieme finito) allora anche la successione ha limite L.**

  (E' l'equivalente del risultato su limite destro e sinistro per le funzioni)

Ad esempio, siano

$$x_n = (-1)^n n$$

$$y_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

La successione x_n non ha limite, perché la sottosuccessione degli indici pari e quella degli indici dispari hanno limiti diversi (rispettivamente, $+\propto$ e $-\propto$) .

Nel secondo caso le sottosuccessioni degli indici pari e dispari tendono entrambe a 0 e dunque lo stesso accade per l'intera successione. Per inciso, il risultato si può anche dedurre dal fatto che il prodotto di una funzione limitata per una infinitesima è infinitesimo.

Per le successioni monotòne vale un risultato importante:

- **ogni successione crescente (in senso stretto o debole) ammette limite e questo coincide con l'estremo superiore della successione (reale o infinito).**

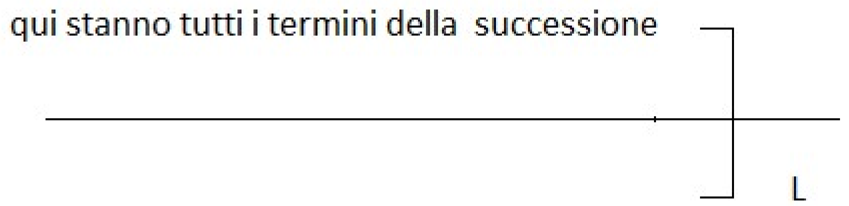
  Lo stesso per le successioni decrescenti, per le quali il limite coincide con l'estremo inferiore.

dimostrazione

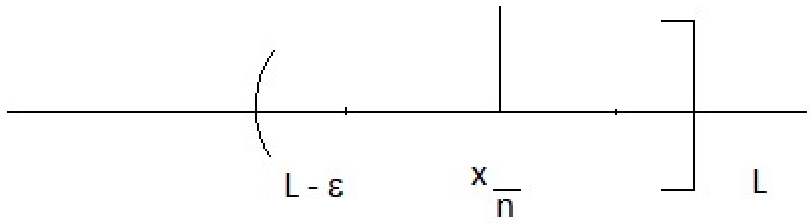
(1) Esaminiamo il caso di una successione crescente con estremo superiore finito L.

Ipotesi

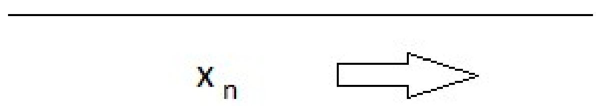
- $\forall n \,,\; x_n \leq L$
- $\forall \varepsilon > 0 \,,\; \exists \bar{n} \in N \;:\; x_{\bar{n}} > L - \varepsilon$
- $\forall n \;,\; x_n \leq x_{n+1}$



qui cade almeno un termine



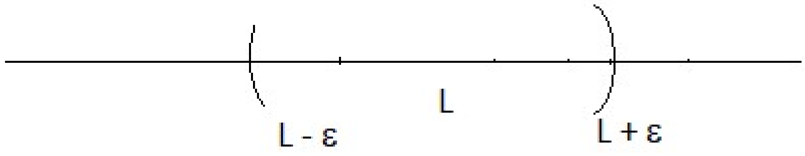
i termini della successione si spostano verso destra



Tesi

$$\forall \varepsilon > 0 ,\ \exists \bar{n} \in N : \forall\, n > \bar{n} \quad L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$$

qui cadono i termini della successione da un certo indice in poi

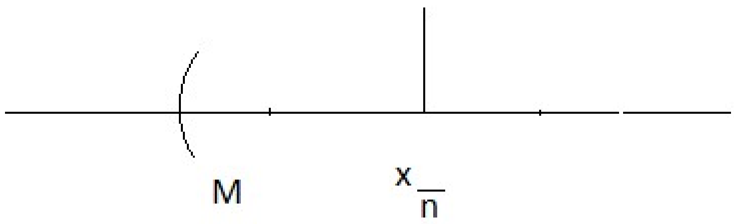


(2) Esaminiamo il caso di una successione crescente con estremo superiore infinito.

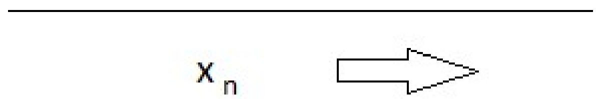
Ipotesi

- $\forall M > 0 , \ \exists \bar{n} \in N \ : \ x_{\bar{n}} > \ M$
- $\forall n \ , \ x_n \leq \ x_{n+1}$

qui cade almeno un termine



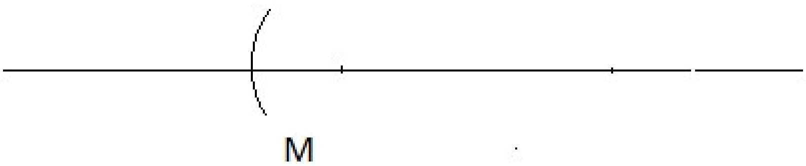
i termini della successione si spostano verso destra



Tesi

$$\forall M > 0 , \ \exists \bar{n} \in N \ : \ \forall \ n > \bar{n} \qquad x_n > \ M$$

qui cadono i termini della successione da un certo indice in poi



- **Teorema di Bolzano-Weierstrass**

  Da ogni successione limitata si può estrarre una sottosuccessione convergente.

  Da ogni successione non limitata superiormente (inferiormente) si può estrarre una sottosuccessione divergente a + ∝ (- ∝).

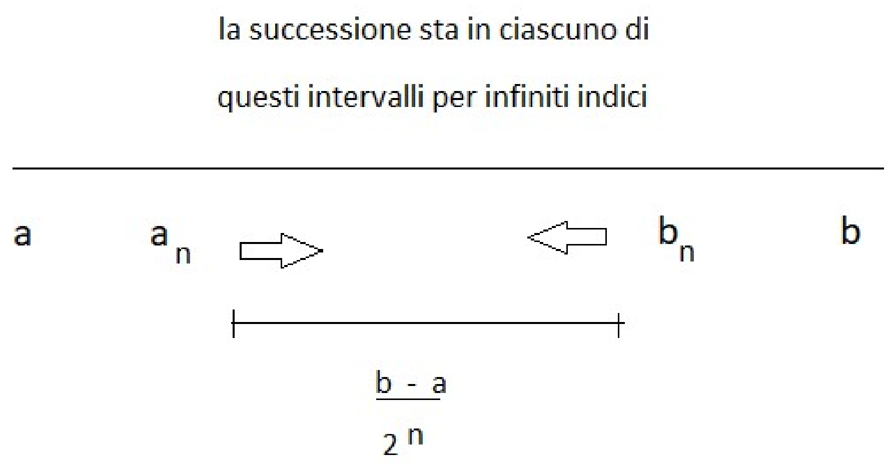
dimostrazione (della prima parte)

Sia [a , b] un intervallo che contiene tutti i termini della successione.

Se c è il punto di mezzo dell'intervallo, la successione appartiene ad almeno uno dei sottointervalli [a , c] o [c , b] per infiniti indici. Indichiamo con [a_1 , b_1] questo intervallo : $a \leq a_1 < b_1 \leq b$.

Ripetiamo questo procedimento di bisezioni successive, ottenendo una successione di intervalli [a_n , b_n] con le seguenti proprietà :

- $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$
- $b_n - a_n = (b - a) / 2^n$
- in ciascun intervallo cadono infiniti termini della successione .



Le due successioni a_n e b_n sono monotòne e limitate , quindi ammettono entrambe limite finito , A e B rispettivamente.

Passando al limite nell'uguaglianza $b_n - a_n = (b – a) / 2^n$, ottiene B – A = 0 , cioè A = B; le due successioni hanno dunque uno stesso limite L.

Poiché $x_n \in [a_1 , b_1]$ per infiniti indici , sia n_1 il primo di questi indici.

Ripetiamo il ragionamento: poiché $x_n \in [a_2 , b_2]$ per infiniti indici, sia n_2 il primo di questi indici, che sia maggiore di n_1 .

In questo modo si costruisce una sottosuccessione x_{k_n} della successione di partenza, tale che $a_n \le x_{k_n} \le b_n$; dal teorema del confronto segue che questa successione tende ad L.

Il numero di Nepero

- **Definizione del numero di Nepero**

Consideriamo le successioni

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad , \quad y_n = x_n + \frac{1}{n!} .$$

La prima è crescente (è una somma di termini positivi e ad ogni passo aggiungiamo un termine alla somma precedente); la seconda è decrescente: infatti

$$y_{n+1} - y_n = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1-n}{(n+1)!} \le 0 .$$

Dunque, per ogni n naturale, risulta:

$$2 \leq x_n < y_n \leq 3.$$

Per il teorema sulle successioni monotòne, esistono due numeri reali L, M $\in$ (2, 3) tali che $x_n \to L$, $y_n \to M$.

Poiché

$$y_n - x_n = 1 / n! \to 0,$$

deve essere L = M.

Dunque le due successioni hanno lo stesso limite : a questo numero, compreso tra 2 e 3, diamo il nome di **numero di Nepero** e lo indichiamo con il simbolo **e.**

I termini della successione x_n sono numeri razionali che approssimano **e** per difetto, quelli dell'altra successione numeri razionali che lo approssimano per eccesso. Ad ogni passo l'errore assoluto commesso nell'una o l'altra approssimazione, cioè **e** – x_n oppure y_n – **e,** è minore di 1 / n !.

Così, se ad esempio vogliamo approssimare **e** a meno di 1 / 10 (cioè con un errore minore di 1 / 10), dobbiamo scegliere n tale che risulti $1 / n! \leq 1 / 10$ cioè $n! \geq 10$ e questo avviene a partire da n = 4.

Per questa scelta si ottiene $x_4 = 65 / 24 = 2,7083....$, $y_4 = 66 / 24 = 2,75$.

Dunque, con una cifra decimale esatta troviamo **e** $\approx$ 2, 7.

Usando le due successioni che definiscono il numero di Nepero, si può dimostrare la sua irrazionalità.

Un modo equivalente per definire il numero di Nepero fa uso della successione

$$z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Utilizzando principalmente il teorema sul binomio di Newton, si trova che è crescente ed ha lo stesso limite delle due precedenti successioni.

dimostrazione

La successione è crescente; infatti, utilizzando il teorema sul binomio di Newton , si trova :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 2+\sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{n^k} \frac{1}{k!} =$$

$$= 2+\sum_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!} \quad (**)$$

(l'ultima uguaglianza si spiega con il fatto che abbiamo diviso per n ciascuno dei k fattori al numeratore). Se sostituiamo n con n + 1 in (**), ognuno dei termini (tutti positivi) della somma aumenta il proprio valore e inoltre aumenta il numero degli addendi: dunque **aumenta** il valore della successione.

Sempre da (**) segue:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < e.$$

Dunque la successione oltre che crescente è anche limitata superiormente e perciò ammette un limite L $\leq$ **e.**

D'altra parte, per n > m dalla (**) si deduce:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2+\sum_{k=2}^{m} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}.$$

Passando al limite rispetto ad n (sulla destra compare la somma di un numero finito di successioni e quindi il limite è la somma dei limiti), si ottiene:

$$L \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} .$$

Passando al limite rispetto ad m, si deduce $L \geq$ **e.** Poiché sapevamo già che era $L \leq$ **e**, in definitiva abbiamo stabilito l'uguaglianza tra ξ ed **e.**

Dunque il numero di Nepero può essere caratterizzato anche come il limite della successione

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} .$$

Facciamo vedere che dal limite precedente segue che è anche :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e .$$

Per ogni $x > 1$ indichiamo con n la sua parte intera, cioè il più grande numero naturale che non supera x:

$$n \leq x < n+1 .$$

Valgono per x e per n le seguenti disuguaglianze:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$$

$$1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} < 1 + \frac{1}{n}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Osserviamo che per $x \to +\infty$ risulta anche $n \to +\infty$.

Inoltre:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \to e$$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \to e$$

Dal teorema del confronto otteniamo il risultato richiesto.

Successioni definite per ricorrenza

Riprendiamo lo studio delle successioni definite per ricorrenza nella forma

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha \\ x_{n+1} &= f\,(x_n) \end{aligned}$$

essendo f un'assegnata funzione, che supponiamo continua nel suo dominio.

Per studiare il comportamento della successione, abbiamo visto che i passi essenziali da seguire sono sintetizzati nei seguenti punti:

- Per prima cosa dobbiamo controllare che la successione sia ben definita.

  Questo significa che il meccanismo che genera i termini della successione non si deve interrompere, cioè che ad ogni passo (compreso quello iniziale) il valore della successione cade nel dominio della funzione generatrice f.

- Occorre poi verificare se la successione è monotòna.

- Se è monotòna, sappiamo che è anche regolare.
  Se la successione non è limitata, il suo limite sarà $+\infty$ o $-\infty$ (a seconda che sia crescente o decrescente); se invece è limitata, il suo limite L deve risolvere l'equazione $L = f\,(L)$ (che si ottiene passando al limite nella relazione che genera la successione); un tale numero si dice costituire un **punto fisso** della funzione f.

Questo risultato si ottiene passando al limite nella relazione ricorsiva

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & f(x_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ L & & f(L) \end{array}$$

- Se non è monotòna, possiamo studiare le sottosuccessioni degli indici pari e degli indici dispari, ripetendo per queste le considerazioni precedenti. Dal comportamento di queste due sottosuccessioni possiamo risalire a quello della successione (che può avere o no limite).

<u>Esempio 1</u>

Consideriamo la successione definita per ricorrenza da:

$$x_1 = 2 \quad , \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)$$

i cui primi termini sono

$$3 / 2 = 1{,}5 \qquad 17 / 12 = 1{,}4166... \qquad 577 / 408 = 1{,}4142...$$

- La successione è **ben definita**

Il meccanismo che, noto il termine n-esimo, permette di dedurre il successivo, si interrompe solo se ad un certo passo la successione assume il valore 0; dobbiamo dunque provare che questa possibilità non si presenta.

La verifica è fatta per induzione:

(i) per n = 1 la successione è diversa da 0 (vale 2)

(i i) se per un arbitrario n la successione è diversa da 0, tale è anche per n + 1:

$$x_n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} \neq 0$$

cioè

$$x_n \neq 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) \neq 0$$

D'altra parte l'equazione

$$\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_n^2 + 2 = 0$$

non ha soluzione e questo prova l'asserto.

Con considerazioni analoghe si può precisare che è $x_n > 0$.

- La successione è **strettamente decrescente**

Occorre far vedere che

$$x_{n+1} < x_n .$$

Questo equivale a

$$\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) < x_n \quad \Leftrightarrow \quad x_n^2 > 2 \quad \Leftrightarrow \quad x_n > \sqrt{2}$$

(avendo già osservato che la successione è positiva).

Dunque, provare che la successione è decrescente equivale a provare per ogni n la disuguaglianza:

$$x_n > \sqrt{2}$$

Questa si prova ancora per induzione:

(i) per $n = 1$ è vera (infatti $x_1 = 1{,}5 > \sqrt{2}$)

(i i) $x_n > \sqrt{2} \Rightarrow x_{n+1} > \sqrt{2}$

Infatti

$$x_{n+1} > \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) > \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_n^2 - 2\sqrt{2}\, x_n + 2 > 0 \Leftrightarrow (x_n - \sqrt{2})^2 > 0 .$$

In conclusione, la successione è (definitivamente) decrescente e limitata inferiormente e dunque ammette un limite reale L.

Per calcolare il valore di L, si risolve l'equazione dei punti fissi:

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{2}{L} \right)$$

ottenendo

$$L = \sqrt{2} .$$

Osservare che, sapendo che la successione è decrescente e conoscendone il limite, siamo in grado di dedurre anche il valore dell'estremo inferiore (perché coincide con il limite).

Esempio 2

$$x_1 = \alpha \in [\, 0 \,,\, \pi / 2 \,] \quad , \quad x_{n+1} = \operatorname{sen} x_n$$

Se $\alpha = 0$ la successione vale costantemente 0

Se $0 < \alpha \leq \pi / 2$:

- $x_n \in (0, \pi / 2\,]$ per ogni n

La verifica per induzione non presenta difficoltà, essendo sen $x_n \leq 1 < \pi / 2$

- la succession è decrescente

Infatti in $(0, \pi/2]$ si ha sen $x_n \leq x_n$.

Dunque la successione ha un limite reale $L \in [0, \pi / 2)$, punto fisso della funzione sen x ; dunque $L = 0$.

Esempio 3

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_{n+1} = \sqrt{4 + 3x_n}$$

- La successione è ben definita

Infatti i suoi termini sono sempre strettamente maggiori di 0.

- Studiamo la monotonia della successione

$$x_{n+1} \geq x_n \iff \sqrt{4+3x_n} \geq x_n \iff$$

$$\iff x_n^2 - 3x_n - 4 \leq 0 \iff x_n \leq 4$$

La successione inizia con un valore minore di 4; se proviamo che anche tutti i termini successivi si mantengono minore di 4, possiamo dedurre che la successione è crescente.

- La successione si mantiene sempre minore di 4

Si dimostra per induzione. Poiché il primo termine verifica la condizione, basta provare che $x_n < 4 \Rightarrow x_{n+1} < 4$: la verifica non presenta difficoltà.

Dunque la successione è crescente ed assume valori nell'intervallo [1 , 4). Risolvendo l'equazione $L = \sqrt{4+3L}$, si trova che il limite è L = 4.

Esempio 4

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_{n+1} = 1 + (1/x_n)$$

- La successione è ben definita ed è sempre $x_n \geq 1$.

- $x_{n+1} \geq x_n \iff x_n \leq (1+\sqrt{5})/2$

  Dunque provare che la successione è crescente equivale a provare che si mantiene minore di $L = (1+\sqrt{5})/2$, viceversa provare che è decrescente equivale a provare che si mantiene maggiore di L.

- $x_n < (1+\sqrt{5})/2 \iff x_{n+1} > (1+\sqrt{5})/2$

Dunque L è alternativamente minore e maggiore del punto fisso L , cioè oscilla attorno a questo punto fisso. Per vedere se la successione tende a questo valore, studiamo le sottosuccessioni degli indici dispari e degli indici pari.

Poiché risulta:

$$x_{n+2} = 1 + \frac{1}{x_{n+1}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x_n}} = \frac{2x_n + 1}{x_n + 1}$$

queste sottosuccessioni sono date rispettivamente da:

$$d_1 = 1 \qquad\qquad p_1 = 1$$
$$d_{n+1} = \frac{2\,d_n + 1}{d_n + 1} \qquad\qquad p_{n+1} = \frac{2\,p_n + 1}{p_n + 1}$$

Procedendo come di consueto, si trova:

- d_n è crescente ed è maggiorata da L = $(1+\sqrt{5})/2$
- p_n è decrescente ed è minorata da L = $(1+\sqrt{5})/2$.

Poiché L è ancora punto fisso, entrambe le sottosuccessioni tendono a questo numero, che dunque è anche il limite della successione.

Esercizi

Calcolare il limite delle seguenti successioni; se infinitesime o infinite, trovarne la parte principale :

$$n^2 \log\cos\left(\frac{2+n}{1+n^2}\right)$$

$$\frac{\sqrt[3]{8\,n^3 + 5\,n - 1} - 2\,n}{1 - e^{-1/n}}$$