Soluzioni

1.

Poiché $A \operatorname{sen}(x+\varphi) = A(\cos\varphi \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}\varphi \cos x)$, imponiamo che sia $A\cos\varphi = 1$, $A\operatorname{sen}\varphi = 2$. Elevando al quadrato e sommando membro a membro, si ottiene $A^2 = 5$, da cui (limitandosi alla soluzione positiva) $A = \sqrt{5}$. Deve poi essere $\cos\varphi = 1/\sqrt{5}$, $\operatorname{sen}\varphi = 2/\sqrt{5}$ e dunque possiamo scegliere $\varphi = \operatorname{arctg} 2$.

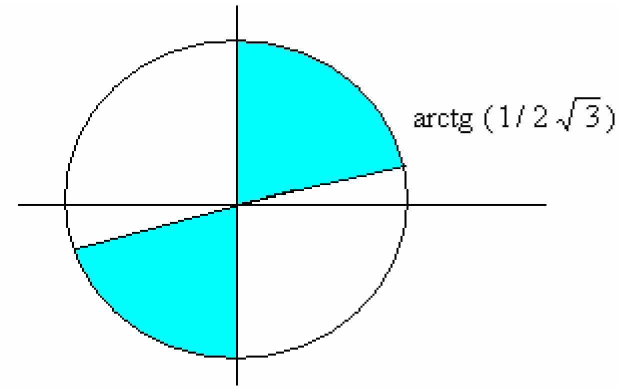
2.

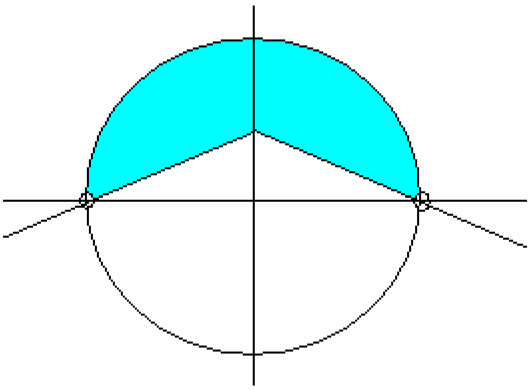
(a) Studiamo la positività del numeratore : $2\sqrt{3}\operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen}^2 x - 1 \geq 0$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\operatorname{sen} x\cos x - \cos^2 x \geq 0 \Leftrightarrow \cos^2 x\,(2\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1) \geq 0$$

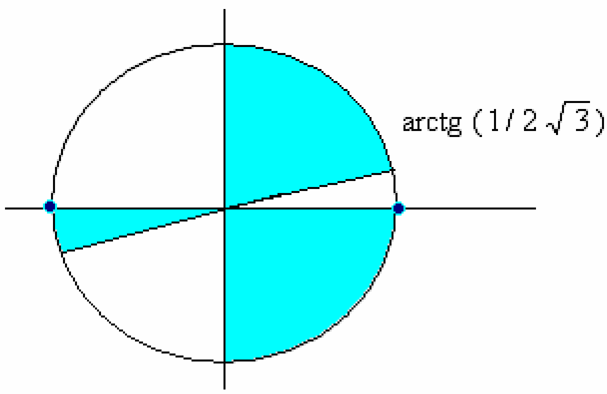
Per quanto riguarda la positività del denominatore, posto $X = \cos x$, $Y = \operatorname{sen} x$, siamo ricondotti a studiare il sistema $2Y + |x| \geq 0$, $X^2 + Y^2 = 1$.

I due insiemi di positività sulla circonferenza goniometrica sono riportati nelle due figure sotto (la parte colorata) :





In definitiva, le soluzioni della disequazione sono :



(b) $\sqrt{|x-1|} > 1-2x \Leftrightarrow 1-2x<0$ oppure $\begin{cases} 1-2x \geq 0 \\ 1-x > 4x^2-4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0$

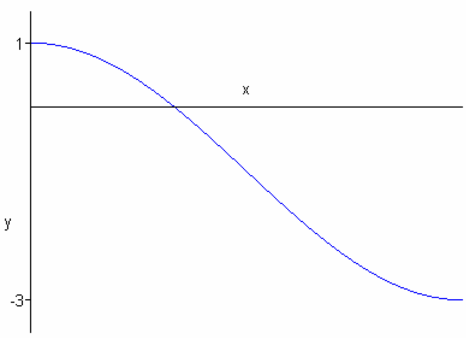
3.

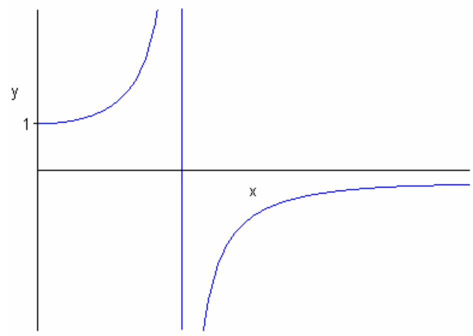
C.E. $[0, \pi] - \{\pi / 3\}$

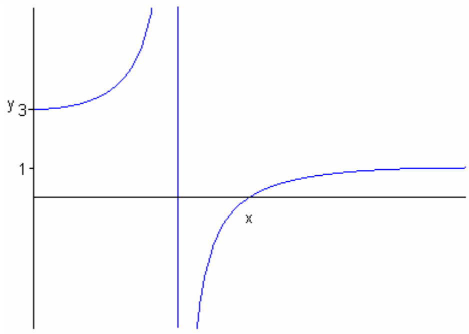
$$\frac{3\cos x}{2\cos x - 1} = \alpha \iff \cos x = \frac{\alpha}{2\alpha - 3} \iff x = \arccos \frac{\alpha}{2\alpha - 3}$$

Deve essere $\left|\frac{\alpha}{2\alpha - 3}\right| \le 1$, $\frac{\alpha}{2\alpha - 3} \ne \frac{1}{2}$. La seconda condizione è verificata per $\alpha \ne 3/2$. Dopo aver elevato al quadrato , si trova che la prima condizione equivale ad $\alpha^2 - 4\alpha + 3 \ge 0$, cioè ad $\alpha \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$. Questo insieme è l'immagine della funzione ; questa risulta invertibile e la sua inversa è data da $f^{-1}(\alpha) = \arccos \frac{\alpha}{2\alpha - 3}$

$y = 1/(2\cos x - 1)$ $\qquad$ $y = 2\cos x - 1$ $y = 2\cos x - 1$

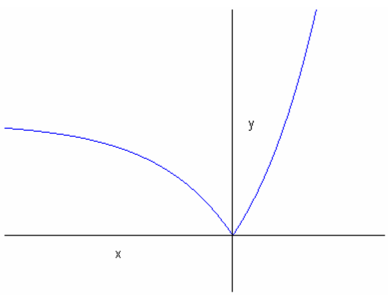


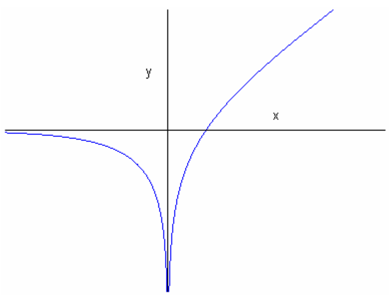


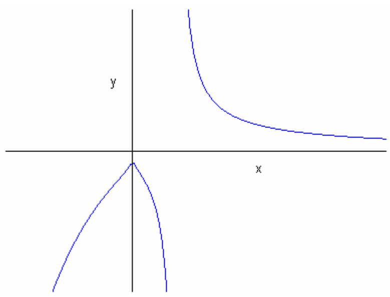


$y = f(x)$

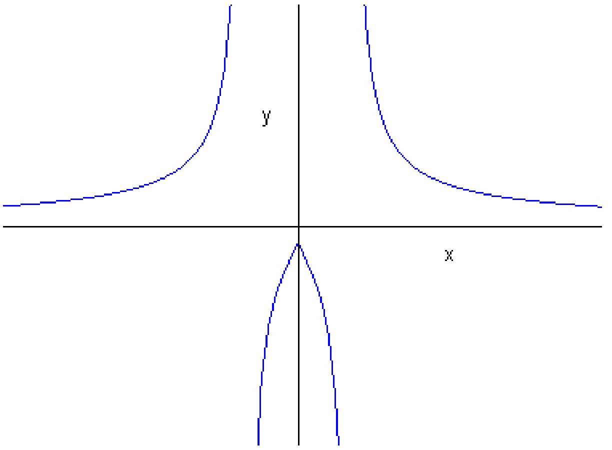
4.







$y = |e^x - 1|$ $\qquad$ $y = \log|e^x - 1|$ $\qquad$ $y = f(x)$



$y = f(|x|)$

5.

Per n = 1 si ottiene il numero 35 , che è divisibile per 7 .

Supponiamo $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ divisibile per 7 e deduciamo che anche $3^{2n+3} + 2^{n+3}$ lo è .

$3^{2n+3} + 2^{n+3} = 9 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 2^{n+2} = 2\ (3^{2n+1} + 2^{n+2}) + 7 \cdot 3^{2n+1}$.

Per ipotesi induttiva il termine entro parentesi è divisibile per 7 ; che il secondo termine sia divisibile per 7 è ovvio .