Istituzioni di Matematiche I
Soluzioni della prova scritta del 7 giugno 2006

1.
La funzione è π-periodica : possiamo limitarci a studiarla in $[\,0 , \pi\,]$.

C.E. $\qquad x \neq \pi / 4$

SEGNO $\qquad f(x) \geq 0 \;\Leftrightarrow$

$$|\,\mathrm{sen}\, x - \cos x\,| \geq 1 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x - 2\,\mathrm{sen}\, x \cos x \geq 1 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{sen}\, x \cos x \leq 0$$

-------------0————————

0 $\qquad \pi / 2 \qquad \pi$

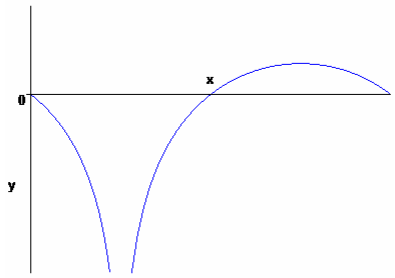
LIMITI $\qquad$ per $x \to \pi / 4 \quad f(x) \to -\infty \quad ; \; f(0) = f(\pi) = 0$

DERIVATE $\qquad f'(x) = (\cos x + \mathrm{sen}\, x) / (\mathrm{sen}\, x - \cos x)$

-------0——————0--------

0 $\quad \pi/4 \quad \pi/2 \quad 3\pi/4 \quad \pi$

$$f''(x) = -2 / (\mathrm{sen}\, x - \cos x)^2 < 0$$



2.
La funzione è definita per $1/3 < x < 1$; il punto $x = 1$ è una discontinuità di II specie. Per stabilire la convergenza dell'integrale, dobbiamo stabilire l'ordine di infinito per $x \to 1$. Poiché il polinomio sotto radice si scompone nella forma $-3\,(x - 1/3)\,(x - 1)$, si deduce che questo ordine è ½ e quindi l'integrale esiste.
Per calcolare l'integrale, applichiamo il metodo di completamento del quadrato :

$$-3\left(x^2 - \frac{4}{3}x\right) - 1 = -3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(1 - 9\left(x - \frac{2}{3}\right)^2\right) .$$

Ponendo $3\,(x - 2/3) = t$, l'integrale diventa :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{3} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1 - \mathrm{sen}^2 t}}\, dt = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6} .$$

3.
$$\sqrt{1 - x} \sim 1 - x/2 - x^2/8 \qquad\qquad \cos\sqrt{x} \sim 1 - x/2 + x^2/24$$

$$\log\left(\log(e + x^2)\right) \sim \log(e + x^2) - 1 = \log(e + x^2) - \log e = \log\left(1 + x^2/e\right) \sim x^2/e$$

$$f(x) \sim \frac{-x^2/6}{x^2/e} \to -e/6$$

4.

Il polinomio caratteristico $k^2 + 4$ ha come radici $\pm 2i$. Le soluzioni dell'equazione omogenea sono $y_0(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x$.

Per trovare una soluzione particolare dell'equazione completa, passiamo in campo complesso, sostituendo il termine noto con $x \exp(ix)$; la soluzione complessa si cerca nella forma $(Ax + B)\exp(ix)$. Sostituendo nell'equazione, si trova $A = 1/3$, $B = -2i/9$:

$$\bar{z}(x) = \frac{1}{9}(3x - 2i)(\cos x + i \operatorname{sen} x)$$

$$\bar{y}(x) = \operatorname{Re} \bar{z}(x) = \frac{1}{9}(3x \cos x + 2 \operatorname{sen} x).$$

Le soluzioni dell'equazione sono dunque date da

$$y(x) = \frac{1}{9}(3x \cos x + 2 \operatorname{sen} x) + c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x.$$

Prima di imporre le condizioni iniziali, calcoliamo la derivata della soluzione generale

$$y'(x) = \frac{1}{9}(5 \cos x - 3x \operatorname{sen} x) - 2c_1 \operatorname{sen} 2x + 2c_2 \cos 2x.$$

Le condizioni sono verificate per $c_1 = 0$, $c_2 = 2/9$:

$$y(x) = \frac{2}{9} \operatorname{sen} 2x + \frac{2}{9} \operatorname{sen} x + \frac{1}{3} x \cos x.$$

5.

$$\frac{|x|^n}{1 + n x^{2n}} \sim \begin{cases} \dfrac{|x|^n}{n x^{2n}} & \text{se } |x| > 1 \\ |x|^n & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$$

Se $|x| > 1$, applicando il criterio della radice : $\dfrac{|x|}{\sqrt[n]{n}\, x^2} \to \dfrac{1}{|x|} < 1$; la serie converge.

Se $|x| < 1$, la serie converge per confronto con una serie geometrica.

Se $x = 1$, il termine generale diventa $1/(n+1)$ e la serie diverge.

Se $x = -1$, il termine generale diventa $(-1)^n/(n+1)$ e la serie converge per Leibniz.