Soluzioni della prova parziale n.2 del 17.01.2006

1.

C.E. $x \neq 0$

LIMITI

per $x \to 0$ $\quad f(x) \to -\infty$

per $x \to \pm\infty$ $\quad f(x) \to \pm\infty$

la retta $y = x$ è asintoto ; la funzione si avvicina all'asintoto da sopra

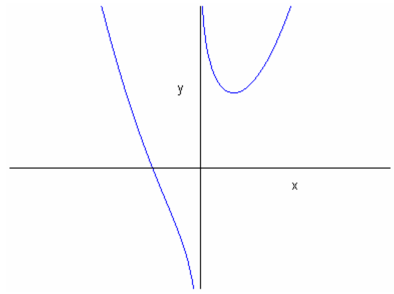
DERIVATA

$$f'(x) = \frac{x^2 + (\operatorname{sgn} x)(1 - \log|x|)}{x^2}$$

Per ottenere il segno della derivata , occorre ricavare graficamente quello della funzione al numeratore.

$$\varphi(x) = x^2 + (\operatorname{sgn} x)(1 - \log|x|)$$

$$\varphi'(x) = \frac{2x^2 - \operatorname{sgn} x}{x}$$



segno derivata

———0---------X————

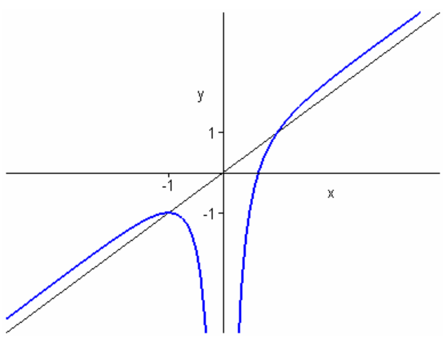
-1 0

$$f''(x) = \frac{(\operatorname{sgn} x)(2\log|x| - 3)}{x^3}$$

segno derivata seconda

———0---------X---------0————

$-e^{3/2}$ 0 $e^{3/2}$



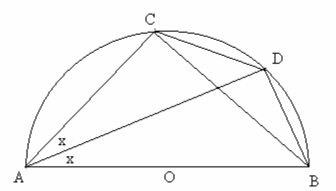
2.

$\text{sen}\, x \sim x - x^3/6$, $\text{tg}\, x \sim x + x^3/3$, $2^x \sim 1 + x \log 2$, $3^x \sim 1 + x \log 3$
$\sqrt{1-x^2} \sim 1 - x^2/2 - x^4/8$, $\cos x \sim 1 - x^2/2 + x^4/24$.

Sostituendo , il limite diventa :

$$\frac{-\dfrac{x^3}{2}\,(\log 2 - \log 3)\,x}{-\dfrac{x^4}{6}} \to 3 \log(2/3) .$$

3.



Calcoliamo l'area del triangolo ABD . Poiché AD = 2 cos x , BD = 2 sen x , l'area vale 2 sen x cos x = sen 2 x .
L'area del triangolo ACD è data da (AC · AD · sen x) / 2 . Poiché AC = 2 cos 2x , AD = 2 cos x , si ottiene 2 cos 2 x sen x cos x = sen 2 x cos 2 x .
L'area del quadrilatero è dunque espressa dalla funzione

$$A(x) = \text{sen}\, 2x + \text{sen}\, 2x \cos 2x \quad , \quad 0 \le 2x \le \pi/2 .$$

Calcolando la derivata e studiandone il segno , si trova che il punto di massimo è $x = \pi/6$.

4.

Le funzioni sono derivabili nell'intervallo dato e risulta

$$f'(x) = 1/\cos^2 x \quad , \quad g'(x) = 2\cos 2x .$$

Inoltre nell'intervallo dato è $g'(x) \neq 0$, eccetto che per $x = \pi/4$, che però non è un punto interno.
Le ipotesi del teorema di Cauchy sono dunque verificate .
Dobbiamo adesso verificare direttamente l'esistenza di $x \in (0, \pi/4)$ tale che :

$$\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{2\cos 2x} = 1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x\,(2\cos^2 x - 1) = 1 \Leftrightarrow 4\cos^4 x - 2\cos^2 x - 1 = 0 .$$

Risolvendo l'equazione si trova $\cos^2 x = (1 + \sqrt{5})/4$ e dunque $x = \arccos \dfrac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2}$.

5.

(i) Una soluzione è z = 0 ; per trovare le altre , poniamo $z = r \exp(i\theta)$. In questo modo ci riconduciamo all'equazione $r^4 \exp(i\,0) = r^2 \exp(i(2\theta - \pi/2))$. Questa equivale a

$$r^3 = 8 \ , \ 2\theta - \pi/2 = 2k\pi$$

cioè

$$r = 1 \ , \ \theta = \pi/4 + k\pi \quad (k = 0, 1).$$

In forma algebrica le soluzioni sono $\pm(1+i)/\sqrt{2}$.

(ii) Cerchiamo le soluzioni nella forma $z = x + i\,y$; sostituendo nell'equazione e separando parte reale da parte immaginaria , si arriva al sistema reale :

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = 2y \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+y^2} = 2y \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y > 0 \\ 1+y^2 = 4y^2 \end{cases}$$

In definitiva , la soluzione cercata è $z = 1 + i/\sqrt{3}$.