Soluzioni

CH.

1. C.E. $x \in (-1,1)$, $y \in [-1,0) \cup (0,1]$

Tenendo conto della C.I., dovrà essere $y \in (0,1]$

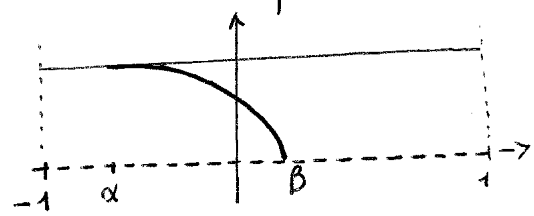
$y=1$ soluzione costante dell'equazione

$$\int -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \iff \sqrt{1-y^2} = \operatorname{arcsen} x + c$$

la C.I. è verificata per $c = \sqrt{3}/2$.

$$\sqrt{1-y^2} = \operatorname{arcsen} x + \sqrt{3}/2 \underset{(*)}{\iff} 1-y^2 = (\operatorname{arcsen} x + \sqrt{3}/2)^2 \underset{(**)}{\iff} y = \sqrt{1-(\operatorname{arcsen} x + \tfrac{\sqrt{3}}{2})^2}.$$

Dobbiamo imporre $0 < \operatorname{arcsen} x + \sqrt{3}/2 < 1$, che fornisce $x \in \left(-\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{sen}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.



La soluzione può essere prolungata saldandola con la soluzione costante in $\left(-1, -\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

2. C.E. $\mathbb{R}$

SGN. $\sqrt{|x^2+2x|} \geq x \iff x<0 \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ |x^2+2x| \geq x^2 \end{cases} \iff x<0 \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2+2x \geq x^2 \end{cases}$

La funzione è sempre positiva (nulla per $x=0$).

LIM per $x \to +\infty$ $\quad f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x} \sim \dfrac{2x}{2x} \to 1$; $\quad y=1$ as. orizz.

per $x \to -\infty$ $\quad f(x) \sim -2x \to +\infty$; $\quad f(x)+2x = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2x}-x} \sim \dfrac{2x}{-2x} \to -1$

$y = -2x-1$ as. obliquo.

DRV $\quad f'(x) = \dfrac{(x+1)\operatorname{sgn}(x^2+2x)}{\sqrt{|x^2+2x|}} - 1$, $\quad x \neq 0,\ x \neq -2$

$x=0$, $x=-2$ cuspidi

$(x+1)\operatorname{sgn}(x^2+2x) \geq \sqrt{|x^2+2x|} \geq 0 \iff \begin{cases} (x+1)\operatorname{sgn}(x^2+2x) \geq 0 \\ x^2+2x+1 \geq |x^2+2x| \end{cases} \iff$

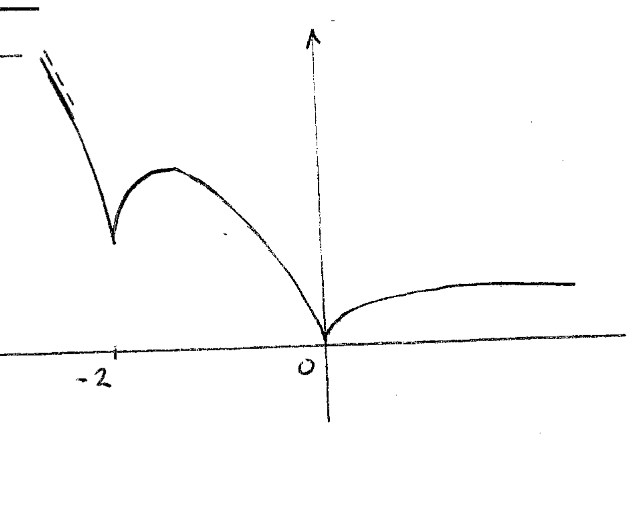
$$\begin{cases} x^2+2x > 0 \\ x+1 \geq 0 \\ x^2+2x+1 \geq x^2+2x \end{cases} \vee \begin{cases} x^2+2x < 0 \\ x+1 < 0 \\ 2x^2+4x+1 \geq 0 \end{cases}$$

SGN f' ------X——0-----------X——

$-2 \qquad -1-\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad 0$

DRV² $\quad f''(x) = -\dfrac{1}{|x^2+2x|^{3/2}}$

sempre negativa



3. $$\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} \underset{x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\operatorname{sen} t}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1+\operatorname{sen} t+\cos t}\,dt \underset{\operatorname{tg}\frac{t}{2}=z}{=} \int_{-1}^{1} \frac{1-z}{1+z^2}\,dz =$$

$$= \Big[\operatorname{arctg} z - \tfrac{1}{2}\lg(1+z^2)\Big]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}$$

4. $$F(x) \sim \frac{\int_0^x t^2\,dt}{-x} \sim -\frac{1}{3}x^2$$

Dall'approssimazione ottenuta segue che $F(0)=0$ come prolungamento continuo, $F'(0)=0$, $F''(0)=-2/3<0$; in particolare il punto è di massimo locale.

In alternativa (con qualche calcolo in più):
il limite per $x\to 0$ si può calcolare con il teorema dell'Hopital:

$$F(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}^3 x}{x}}{-\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^3 x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x} = 0.$$

Analogamente per $F'(0)$:

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{\operatorname{sen}^3 t}{t}\,dt}{x} \underset{H}{=} \dots$$

Per quanto riguarda la natura del punto, segue subito dallo studio del segno di $F(x)-F(0)$ ($\int_0^x \frac{\operatorname{sen}^3 t}{t}\,dt$ positivo in un intorno destro di 0, negativo in un intorno sinistro; il contrario per $\lg(1-x)$).