Soluzioni [1]

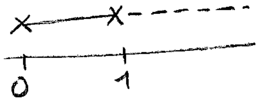
1. $f(x) = \exp\left(-\frac{2|x-1|}{x \lg x^2} \lg x\right)$, $x>0,\ x\neq 1$

$= \exp\left(-\frac{|x-1|}{x}\right)$

SGN sempre positiva

LIM $x=1$ D.E. ($f(1)=1$) , per $x\to 0^+$ $f(x)\to 0$ D.E. , per $x\to+\infty$ $f(x)\to \frac{1}{e}$

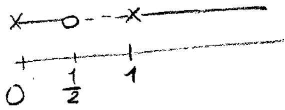
DRV $f'(x) = -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{sgn}(x-1)\exp\left(-\frac{|x-1|}{x}\right)$

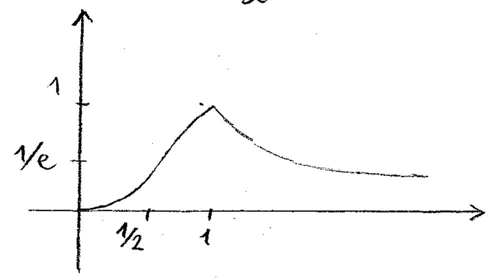


per $x\to 1^{\pm}$ $f'(x)\to \mp 1$ pto angoloso

per $x\to 0^+$ $f'(x)\to 0$

DRV² $f''(x) = \frac{1}{x^4}\left(1+2x\,\mathrm{sgn}(x-1)\right)\exp\left(-\frac{|x-1|}{x}\right)$





2. $\sqrt{4x^2+4x+2} = 2x+t$

$x = \frac{t^2-2}{4(1-t)}$, $dx = -\frac{t^2-2t+2}{4(1-t)^2}\,dt$, $\sqrt{4x^2+4x+2} = -\frac{t^2-2t+2}{2(1-t)}$

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{26}-4} \frac{t^2-2}{4(t-1)^2}\,dt = \frac{1}{4}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{26}-4}\left(1+\frac{2t-2}{(t-1)^2}-\frac{1}{(t-1)^2}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{4}\left[t+\lg(t-1)^2+\frac{1}{t-1}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{26}-4} = \cdots$$

Perché il calcolo precedente sia corretto, occorre controllare che nell'intervallo dato la fz. $f(x)$ sia continua. Questo segue dal fatto che è $4x^2+4x+2>0$ $\forall x$.

3. La fz. è pari e nulla per $x=0$; nei suoi polinomi di Taylor compaiono solo le potenze pari di x a partire da x^2. Avendo a disposizione due parametri, possiamo imporre due condizioni sui coefficienti e annullare quello di x^2 e di x^4. La fz. può dunque essere un infinitesimo almeno del sesto ordine

$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^7)$ $\frac{1}{1+bx^2} = 1-bx^2+b^2x^4-b^3x^6+o(x^7)$

$\frac{1+ax^2}{1+bx^2} = 1+(a-b)x^2-b(a-b)x^4+b^2(a-b)x^6+o(x^7)$

$f(x) = \left(-\frac{1}{2}-a+b\right)x^2+\left(\frac{1}{24}+b(a-b)\right)x^4+\left(-\frac{1}{720}-b^2(a-b)\right)x^6+o(x^7)$

$$\begin{cases} a-b=-1/2 \\ b(a-b)=-1/24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-5/12 \\ b=1/12 \end{cases}$$

$f(x) \sim \frac{x^6}{480}$

4. $y=0$ non è soluzione del problema (dovendo essere $y(1)=-1$).
Ponendo $y=1/z$, $y'=-z'/z^2$:

$$z' - \frac{z}{x} = x \quad , \quad z(1) = -1.$$

L'eq. è lineare del primo ordine.
Con le notazioni consuete: $a(x) = -1/x$ $(x>0)$, $A(x) = -\lg x$, $e^{A(x)} = \frac{1}{x}$

$$\left(\frac{1}{x} z\right)' = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} z = x + c \quad \Rightarrow \quad z = x^2 + cx$$

Imponendo la C.I. si ottiene $c=-2$:

$$z = x^2 - 2x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{x^2-2x} \quad , \quad x \in (0,2).$$

5. Al 10° passo si ottiene l'intervallo $\left[a, a+\frac{b-a}{2^{10}}\right] = \left[1, 1+\frac{1}{2^9}\right]$
Gli estremi dell'intervallo approssimano α rispettiv. per difetto e per eccesso,
con un errore $E < \frac{1}{2^9} \sim 0,0019$
In particolare, con due cifre decimali esatte è $\alpha = 1,00$.

Soluzioni [2]

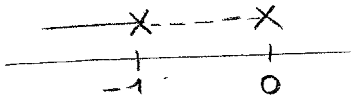
1. $f(x) = \exp\left(\frac{2|x+1|}{x \lg x^2} \lg(-x) \right), \quad x<0,\ x \neq -1$

$= \exp\left(\frac{|x+1|}{x} \right)$

SGN sempre positiva

LIM $x=-1$ D.E. ($f(-1)=1$), per $x \to 0^-$ $f(x) \to 0$ D.E., per $x \to -\infty$ $f(x) \to 1/e$

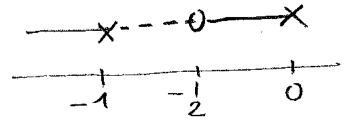
DRV $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \operatorname{sgn}(x+1) \exp\left(\frac{|x+1|}{x} \right)$

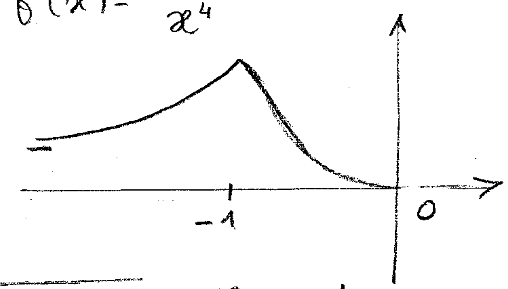


per $x \to -1^\pm$ $f'(x) \to \mp 1$ pto. angoloso

per $x \to 0^-$ $f'(x) \to 0$

DRV^2 $f''(x) = \frac{1}{x^4} (1 + 2x \operatorname{sgn}(x+1)) \exp\left(\frac{|x+1|}{x} \right)$





2. $\sqrt{4x^2-4x+2} = 2x+t$

$x = \frac{2-t^2}{4(1+t)}, \quad dx = -\frac{t^2+2t+2}{4(1+t)^2}, \quad \sqrt{4x^2-4x+2} = \frac{t^2+2t+2}{2(1+t)}$

$$\int_{\sqrt{26}+4}^{\sqrt{2}} \frac{t^2-2}{4(1+t)^2}\, dt = \frac{1}{4} \int_{\sqrt{26}+4}^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{2t+2}{(t+1)^2} - \frac{1}{(t+1)^2} \right) dt$$

$$\frac{1}{4} \left[t - \lg(t+1)^2 + \frac{1}{t+1} \right]_{\sqrt{26}+4}^{\sqrt{2}} = \cdots$$

Perché il precedente calcolo sia corretto, occorre controllare che nell'intervallo dato la fz. $f(x)$ sia continua. Questo segue dal fatto che $\forall x \in R$ risulta $4x^2-4x+2>0$.

3. I calcoli sono del tutto analoghi a quelli in [1], scambiando a con b.

$f(x) \sim \frac{x^6}{480}$ per $a = 1/12$, $b = -5/12$.

4. Svolgimento come in [1].

$z' - \frac{z}{x} = -x, \quad z(1) = 1$

$\left(\frac{1}{x} z\right)' = -1 \Rightarrow \frac{z}{x} = c - x \Rightarrow z = cx - x^2$

la C.I. è soddisfatta per $c=2$. $\Rightarrow z = 2x - x^2 \Rightarrow y = \frac{1}{2x-x^2}, \quad x \in (0,2)$.

5. Vedi [1]

$\alpha \in \left(2 - \frac{1}{2^{10}}, 2\right)$ errore $< \frac{1}{2^{10}} \sim 0,00097\ldots$