Soluzioni [1]

1. Serie a segno costante positivo. Il criterio della radice o quello del rapporto portano al limite e^x e quindi alla convergenza della serie per $x < 0$. Per $x = 0$ si ottiene la serie armonica divergente.

Per quanto riguarda l'integrale, si ha : $\int_{-\infty}^{x} e^{nt}\, dt = \left[\frac{e^{nt}}{n} \right]_{-\infty}^{x} = \frac{e^{nx}}{n}$.

Infine, per calcolare la somma della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n} = \int_{-\infty}^{x} \sum_{n=1}^{\infty} e^{nt}\, dt = \int_{-\infty}^{x} \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{t}\right)^{n}\, dt = \int_{-\infty}^{x} \left(\frac{1}{1-e^{t}} - 1 \right) dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{t}}{1-e^{t}}\, dt =$$

$$= \left[-\log(1-e^{t}) \right]_{-\infty}^{x} = -\log(1-e^{x}).$$

2. Iniziamo risolvendo l'equazione omogenea, con il metodo del polinomio caratteristico:

se $k > 2$ $\quad y_0(x) = e^{x}\,(c_1 e^{\sqrt{k-2}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{k-2}\,x})$

se $k < 2$ $\quad y_0(x) = e^{x}\,(c_1 \cos\sqrt{2-k}\,x + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{2-k}\,x)$

se $k = 2$ $\quad y_0(x) = e^{x}\,(c_1 + c_2 x)$.

Cerchiamo una soluzione particolare dovuta all'esponenziale. Poiché il coefficiente della x è radice (doppia) del polinomio caratteristico per $k = 2$, la soluzione sarà della forma $A e^x$ se $k \neq 2$, della forma $A x^2 e^x$ se $k = 2$. Sostituendo nell'equazione, si ottiene $y_1(x) = e^x / (2 - k)$ nel primo caso, $y_2(x) = x^2 e^x / 2$ nel secondo.

Cerchiamo una soluzione particolare dovuta alla costante. Poiché il coefficiente di y si annulla per $k = 3$, la soluzione sarà della forma A se $k \neq 3$, della forma A x se $k = 3$. Sostituendo nell'equazione, si ottiene $y_1(x) = 2 / (3 - k)$ nel primo caso, $y_2(x) = -x$ nel secondo.

Riassumendo:

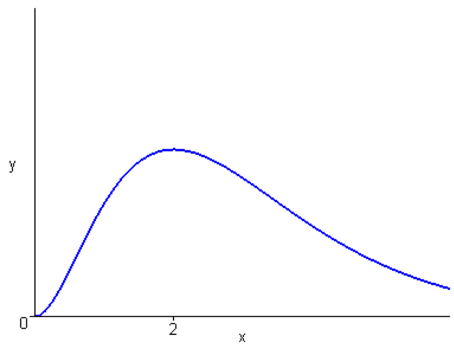
se $K > 2$, $k \neq 3$ $\quad y(x) = e^{x}\,(c_1 e^{\sqrt{k-2}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{k-2}\,x}) + \frac{e^{x}}{2-k} + \frac{2}{3-k}$

se $K = 3$ $\quad y(x) = e^{x}\,(c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}) - e^{x} - x$

se K < 2 $\quad y(x) = e^x \left(c_1 \cos\sqrt{2-k}\,x + c_2 \,\mathrm{sen}\sqrt{2-k}\,x \right) + \frac{e^x}{2-k} + \frac{2}{3-k}$

se k = 2 $\quad y(x) = e^x (c_1 + c_2 x) + \frac{x^2}{2} e^x + 2.$

3.



L'ascissa x_0 del punto cercato dovrà stare nell'intervallo (0,2).

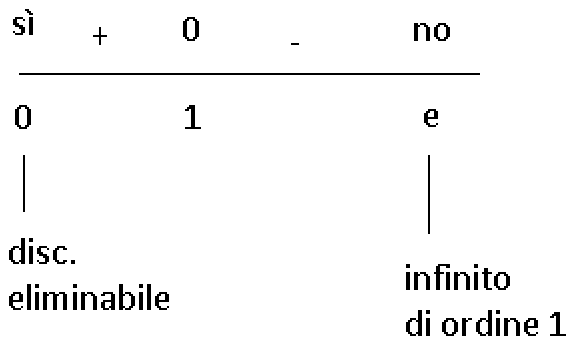
L'equazione della retta tangente è

$$y = x_0^2 e^{-x_0} + (2x_0 - x_0^2) e^{-x_0} (x - x_0)$$

Imponendo che passi per il punto (-1 , 0), si ottiene che deve essere $x_0^2 = 2$ e dunque $x_0 = \sqrt{2}$ (l'altra soluzione essendo evidentemente da scartare).

4.

Schema segno e integrabilità di f (t) - con le notazioni consuete



La funzione F (x) è dunque definita in [0 , e). Poiché F' (x) = f (x) , il segno di F' è quello riportato nello schema. Da questo si deduce che la funzione assume massimo 0 per x = 1 e dunque anche l'estremo superiore vale 0.

5.

Le due circonferenze hanno equazione $(x-2)^2 + y^2 = 4$, $(x-4)^2 + y^2 = 4$ rispettivamente e si intersecano nei punti $(3, \sqrt{3})$, $(3, -\sqrt{3})$.

Calcolo del volume con il metodo delle sezioni.

Data la simmetria, possiamo ruotare la sola parte al di sopra dell'asse delle x e poi moltiplicare per 2 l'integrale che fornisce il volume. A destra la regione è limitata dalla curva di equazione $x = 2 + \sqrt{4 - y^2}$, a sinistra da quella di equazione $x = 4 - \sqrt{4 - y^2}$.

$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} [(2+\sqrt{4-y^2})^2 - (4-\sqrt{4-y^2})^2]\, dy =$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} (-12+12\sqrt{4-y^2})\, dy = -24\sqrt{3}\,\pi + 96\pi \int_0^{\pi/3} \cos^2 t\, dt =$$

$$= -24\sqrt{3}\,\pi + 96\pi \left[\frac{t + \text{sen}t \cos t}{2} \right]_0^{\pi/3} = = 16\pi^2 - 12\sqrt{3}\,\pi .$$

Calcolo con il metodo dei gusci cilindrici.

Anche in questo caso possiamo limitarci a ruotare la sola parte al di sopra dell'asse delle x e poi moltiplicare per 2 l'integrale.

$$V = 4\pi \int_2^3 x\sqrt{4-(x-4)^2}\, dx + 4\pi \int_3^4 x\sqrt{4-(x-2)^2}\, dx =$$

(poniamo x – 4 = t nel primo integrale, x – 2 = t nel secondo)

$$= 4\pi \int_{-2}^{-1} (4+t)\sqrt{4-t^2}\, dx + 4\pi \int_1^2 (2+t)\sqrt{4-t^2}\, dx =$$

$$= 16\pi \int_{-2}^{-1} \sqrt{4-t^2}\, dt + 4\pi \int_{-2}^{-1} t\sqrt{4-t^2}\, dt + 8\pi \int_1^2 \sqrt{4-t^2}\, dt + 4\pi \int_1^2 t\sqrt{4-t^2}\, dt$$

Il secondo e il quarto integrale si eliminano a vicenda (funzione dispari, intervalli simmetrici rispetto all'origine); il primo e il terzo sono uguali (funzione pari, intervallo simmetrico rispetto all'origine). Dunque rimane da calcolare:

$$V = 24\pi \int_1^2 \sqrt{4-t^2}\, dt = 96\pi \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^2 z\, dz = 96\pi \left[\frac{t + \text{sen}t \cos t}{2} \right]_{\pi/6}^{\pi/2} = 16\pi^2 - 12\sqrt{3}\,\pi .$$

Soluzioni [2]

1. Serie a segno costante positivo. Il criterio della radice o quello del rapporto portano al limite e^{2x} e quindi alla convergenza della serie per x < 0. Per x = 0 si ottiene la serie armonica divergente.

Per quanto riguarda l'integrale, si ha : $\int_{-\infty}^{x} e^{2nt}\, dt = \left[\frac{e^{2nt}}{2\,n} \right]_{-\infty}^{x} = \frac{e^{2nx}}{2n}$.

Infine, per calcolare la somma della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2nx}}{n} = 2\int_{-\infty}^{x} \sum_{n=1}^{\infty} e^{2nt}\ dt = 2\int_{-\infty}^{x} \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{2t}\right)^n\ dt = 2\int_{-\infty}^{x} \left(\frac{1}{1-e^{2t}} - 1 \right) dt = 2\int_{-\infty}^{x} \frac{e^{2t}}{1-e^{2t}}\ dt =$$

$$= \left[-\log(1-e^{2t})\ \right]_{-\infty}^{x} = -\log(1-e^{2x}).$$

2. Iniziamo risolvendo l'equazione omogenea, con il metodo del polinomio caratteristico:

se k > 0 $\qquad y_0(x) = e^x\,(c_1\, e^{\sqrt{k}\,x} + c_2\, e^{-\sqrt{k}\,x})$

se k < 0 $\qquad y_0(x) = e^x\,(c_1 \cos\sqrt{-k}\ x + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{-k}\ x)$

se k = 0 $\qquad y_0(x) = e^x\,(c_1 + c_2\, x)$.

Cerchiamo una soluzione particolare dovuta all'esponenziale. Poiché il coefficiente della x è radice (doppia) del polinomio caratteristico per k = 0, la soluzione sarà della forma A e^x se k ≠ 0 , della forma A x^2 e^x se k = 0. Sostituendo nell'equazione, si ottiene $y_1(x) = -\ e^x / k$ nel primo caso, $y_2(x) = x^2 e^x / 2$ nel secondo.

Cerchiamo una soluzione particolare dovuta alla costante. Poiché il coefficiente di y si annulla per k = 1, la soluzione sarà della forma A se k ≠ 1 , della forma A x se k = 1. Sostituendo nell'equazione, si ottiene $y_1(x) = 2 / (1 - k)$ nel primo caso, $y_2(x) = -x$ nel secondo.

Riassumendo:

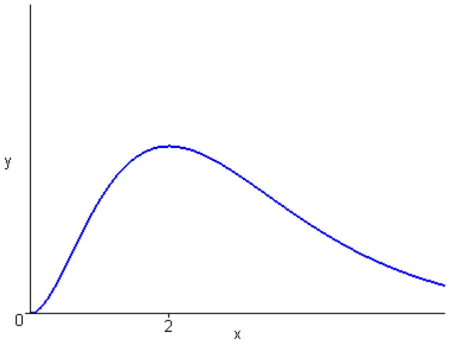
se K > 0 , k ≠ 1 $\qquad y(x) = e^x\,(c_1\, e^{\sqrt{k}\,x} + c_2\, e^{-\sqrt{k}\,x}) - \frac{e^x}{k} + \frac{2}{1-k}$

se K = 1 $\qquad y(x) = e^x\,(c_1\, e^{x} + c_2\, e^{-x}) - e^x - x$

se K < 0 $\qquad y(x) = e^x \left(c_1 \cos\sqrt{-k}\, x + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{-k}\, x \right) - \dfrac{e^x}{k} + \dfrac{2}{1-k}$

se k = 0 $\qquad y(x) = e^x \left(c_1 + c_2 x \right) + \dfrac{x^2}{2} e^x + 2.$

3.



L'ascissa x_0 del punto cercato dovrà stare nell'intervallo (0,2).

L'equazione della retta tangente è

$$y = x_0^2 e^{-x_0} + (2x_0 - x_0^2) e^{-x_0} (x - x_0)$$

Imponendo che passi per il punto (-2 , 0), si ottiene che deve essere $x_0^2 + x_0 - 4 = 0$ e dunque $x_0 = (\sqrt{17} - 1)/2$ (l'altra soluzione essendo evidentemente da scartare).

4.

Schema segno e integrabilità di f (t) - con le notazioni consuete

sì	-	0	+	no
0		1		e
disc. eliminabile				infinito di ordine 1

La funzione F (x) è dunque definita in [0 , e). Poiché F' (x) = f (x) , il segno di F' è quello riportato nello schema. Da questo si deduce che la funzione assume minimo 0 per x = 1 e dunque anche l'estremo inferiore vale 0.

5.

Le due circonferenze hanno equazione $(x - 4)^2 + y^2 = 16$, $(x - 8)^2 + y^2 = 16$ rispettivamente e si intersecano nei punti $(6, 2\sqrt{3})$, $(6, -2\sqrt{3})$.

Calcolo del volume con il metodo delle sezioni.

Data la simmetria, possiamo ruotare la sola parte al di sopra dell'asse delle x e poi moltiplicare per 2 l'integrale che fornisce il volume. A destra la regione è limitata dalla curva di equazione $x = 2 + \sqrt{4 - y^2}$, a sinistra da quella di equazione $x = 4 - \sqrt{4 - y^2}$.

$$V = 2\pi \int_0^{2\sqrt{3}} [(4 + \sqrt{16 - y^2})^2 - (8 - \sqrt{16 - y^2})^2]\, dy =$$

$$= 2\pi \int_0^{2\sqrt{3}} (-48 + 24\sqrt{16 - y^2})\, dy = -192\sqrt{3}\pi + 768\pi \int_0^{\pi/3} \cos^2 t\, dt =$$

$$= -192\sqrt{3}\pi + 768\pi \left[\frac{t + \text{sen}t \cos t}{2} \right]_0^{\pi/3} = = 128\pi^2 - 96\sqrt{3}\pi .$$

Calcolo con il metodo dei gusci cilindrici.

Anche in questo caso possiamo limitarci a ruotare la sola parte al di sopra dell'asse delle x e poi moltiplicare per 2 l'integrale.

$$V = 4\pi \int_4^6 x\sqrt{16 - (x-8)^2}\, dx + 4\pi \int_6^8 x\sqrt{16 - (x-4)^2}\, dx =$$

(poniamo x – 8 = t nel primo integrale, x – 4 = t nel secondo)

$$= 4\pi \int_{-4}^{-2} (8 + t)\sqrt{16 - t^2}\, dx + 4\pi \int_2^4 (4 + t)\sqrt{4 - t^2}\, dx =$$

$$= 4\pi \int_{-4}^{-2} 8\sqrt{16 - t^2}\, dt + 4\pi \int_{-4}^{-2} t\sqrt{16 - t^2}\, dt + 4\pi \int_2^4 4\sqrt{16 - t^2}\, dt + 4\pi \int_2^4 t\sqrt{16 - t^2}\, dt$$

Il secondo e il quarto integrale si eliminano a vicenda (funzione dispari, intervalli simmetrici rispetto all'origine); il primo e il terzo sono uguali (funzione pari, intervallo simmetrico rispetto all'origine). Dunque rimane da calcolare:

$$V = 48\pi \int_2^4 \sqrt{16 - t^2}\, dt = 768\pi \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^2 z\, dz = 768\pi \left[\frac{t + \text{sen}t \cos t}{2} \right]_{\pi/6}^{\pi/2} = 128\pi^2 - 96\sqrt{3}\pi. \; .$$