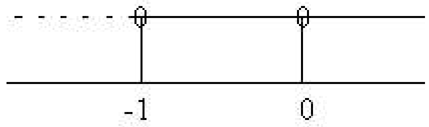
1.

C.E. **R**

SGN

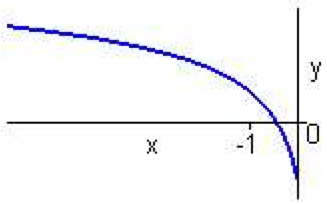


LIM Per $x \to \pm\infty$ $f(x) \to \pm\infty$ (senza asintoto)

DRV $$f'(x) = \log(1+2|x|) + \frac{2\,\mathrm{sgn}x\,(1+x)}{1+2|x|}, \quad x \neq 0$$

Per x > 0 questa derivata è sicuramente positiva ; per ottenerne il segno per x < 0 si ricorre allo studio grafico.
Essendo

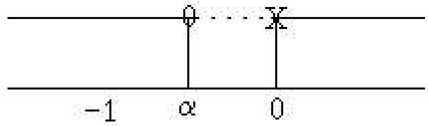
$$f''(x) = 4\,\mathrm{sgn}\,x\,\frac{1+|x|-\mathrm{sgn}\,x}{(1+2|x|)^2}, \quad \text{per } x \neq 0$$



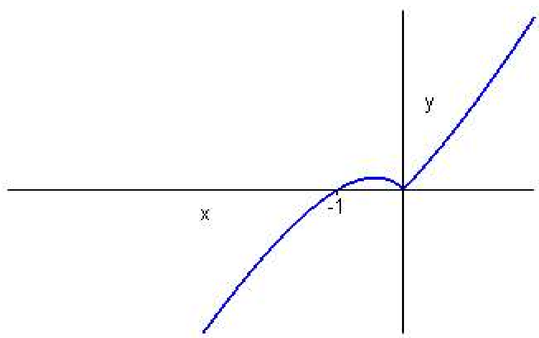
e dunque

$$f''(x) = 4\,\frac{x-2}{(1-2x)^2}, \quad \text{per } x < 0$$

si ottiene per f ' il grafico riportato in alto;
il segno di f' è indicato a fianco.



GRAFICO



In particolare, x = 0 è un punto angoloso di flesso.

2.

Il problema richiede di scrivere il polinomio di Taylor di punto iniziale 0 e grado 3 per la funzione data.
Al terzo ordine si ottengono le seguenti approssimazioni :

$\text{sen}\, x \sim x - x^3 / 6$

$e^{\text{sen}\, x} \sim 1 + (x - x^3 / 6) + x^2 / 2 + x^3 / 6 = 1 + x + x^2 / 2$

$\text{tg}\, x \sim x + x^3 / 3$

$\text{sen} (\text{tg}\, x) \sim (x + x^3 / 3) - x^3 / 6 = x + x^3 / 6$

$$\frac{1}{1 + \text{sen} (\text{tg}\, x)} \sim 1 - (x + x^3 / 6) + (x^2) - (x^3) = 1 - x + x^2 - 7 x^3 / 6 .$$

In definitiva dunque :

$P (x) = 1 + x^2 / 2 - 2 x^3 / 3 .$

3.

Dalla seconda equazione si ricava che z non può essere uguale a 0 e che possiamo scrivere $w = (1 - \bar{z}) / z$. Sostituiamo nella prima equazione: $z + \left(\dfrac{1 - \bar{z}}{z} \right) \bar{z} = |z|$ ovvero $z^2 + \bar{z} - \bar{z}^2 = z |z|$. Posto $z = x + i y$, l'equazione diventa

$$x^2 - y^2 + 2 i x y + x - i y - x^2 + y^2 + 2 i x y = x \sqrt{x^2 + y^2} + i y \sqrt{x^2 + y^2} ,$$

da cui deduciamo il sistema reale

$$x = x \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad 4 x y - y = y \sqrt{x^2 + y^2} \quad .$$

Dalla prima equazione si ottiene :

(i) $x = 0$.

In questo caso la seconda equazione diventa – y = y | y | , che fornisce y = 0 (da scartare perché otterremmo z = 0) oppure | y | = -1 (impossibile).

(ii) $\sqrt{x^2 + y^2}$ = 1 .

La seconda equazione diventa 2 y (2 x – 1) = 0. Da questa deduciamo y = 0 (e quindi x = ± 1) e x = ½ (e quindi $\pm\sqrt{3}/2$).
In definitiva , z = ± 1 , z = $(1 \pm i\sqrt{3})/2$.

Le 4 coppie di soluzioni sono :

z = 1 , w = 0 ; z = -1 , w = -2 ; z = $(1 \pm i\sqrt{3})/2$, w = 1 .

4.

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2 - 5x + 6} - (x+3))(\sqrt{x^2 - 5x + 6} + (x+3))}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + (x+3)}$$
$$= \frac{-11x - 3}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + (x+3)} \approx \frac{-11x - 3}{2x} \to -11/2$$

Occorre provare che in un intorno di +∞ si ha $\sqrt{x^2 - 5x + 6} - (x+3) < 0$, ovvero $\sqrt{x^2 - 5x + 6} < x + 3$.

Poiché la radice è definita in $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$, tenendo conto dell'obiettivo possiamo supporre x ≥ 3. Elevando al quadrato ambo i membri della disequazione, si ottiene x > -3/11 . La disequazione è dunque verificata almeno per x ≥ 3, che è appunto un intorno di +∞.