

Serie numeriche ed equazioni differenziali : esercizi proposti

1. Studiare la convergenza delle seguenti serie :

$$1. \quad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n \log n}{n^2 + 1}$$

$$2. \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + \log n}{\sqrt{1 + n^3}}$$

$$4. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(n+1)^{3/2} - 1}$$

$$4. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n^2 + e^{-n}}{n^2 + 1}$$

$$5. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } n}{2^n + 2^{-n}}$$

$$6. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)$$

$$7. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(1 - \cos(1/n))}{\sqrt{n+1}}$$

$$8. \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$$

$$9. \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n!)}$$

$$10. \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \cos(n\pi)}{1 + n^2}$$

2. Studiare la convergenza delle seguenti serie al variare del parametro reale x :

$$1. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 + n x^{2n}}$$

$$2. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n + n^3}}$$

$$3. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n x)}{\sqrt{n + n^2 x^2}}$$

$$4. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x + n^2 + 1}{n^3 + n + 2}$$

$$5. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2 + 1} x^n$$

$$6. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} e^{-n x}$$

$$7. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n (\log(x^2 - 1))^n}$$

$$8. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n + \sqrt{n}}{n^x}$$

3. Risolvere le equazioni o i sistemi differenziali lineari seguenti (e, quando richiesto, imporre le condizioni iniziali indicate) :

1. $y'' + 4y = \sin x$
2. $y'' + y = \cos x$
3. $y'' + 4y' + wy = xe^x$
4. $2y''' - y'' - y = \sin x$
5. $y'' + y' = x \sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
6. $y'' + 4y = e^{2x}(1+x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
7. $y' = y - 2z + \sin x$, $z' = 2y + z$, $y(0) = z(0) = 0$
8. $y' + y/\sqrt{x} = \sqrt{x}$

4. Risolvere le seguenti equazioni a variabili separate (e, quando richiesto, imporre la condizione iniziale indicata) ; precisare l'intervallo in cui sono definite le soluzioni e tracciare il grafico di alcune di esse :

1. $y' = e^y$
2. $y' = (1+2x)(1+y^2)$, $y(0) = 1$
3. $y' = \sqrt{y/x}$, $x > 0$
4. $y' = x \cos y / (1 + \sin y)$, $|y| < \pi/2$

5. Una palla è lasciata cadere verticalmente al suolo da un'altezza di 1 metro; ad ogni rimbalzo perde il 10 % della sua energia e quindi risale ad un'altezza pari ai 9/10 di quella iniziale . Con l'ipotesi fatta sull'energia, la palla rimbalza infinite volte : trovare lo spazio complessivo percorso.

Trovare il tempo necessario alla palla per fermarsi, ricordando che per cadere da una altezza di h metri la palla impiega $\sqrt{2h/g}$ secondi (dove g è l'accelerazione di gravità pari a circa $9,8 \text{ m/s}^2$) e che lo stesso tempo era stato impiegato per la risalita precedente.

Osservare che , pur compiendo infiniti rimbalzi, sia il tempo richiesto perché si fermi sia lo spazio percorso sono finiti : a questo punto qualcuno potrebbe ricordarsi dell'antico filosofo Zenone e del suo paradosso su Achille e la tartaruga

6. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere :

1. ogni serie assolutamente convergente è convergente
2. ogni serie convergente è assolutamente convergente
3. una serie a segno costante non può essere indeterminata
4. una serie convergente ha il termine generale infinitesimo
5. ogni serie con termine generale infinitesimo è convergente
6. ogni serie a segno alterno è convergente

