Analisi Matematica - corso A

Soluzioni della prova scritta parziale n.1 del 5. 11. 07

[1]

1.

COMPOSIZIONE

$$F(x) = \frac{1}{\log(x^2 - 1)} .$$

C.E.

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x^2 - 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$$

MONOTONIA

In ciascuno dei due intervalli positivi, $x^2 - 1$ è crescente ; la funzione log x conserva la monotonia , mentre la funzione 1 / x la inverte ; dunque F (x) decresce.
In ciascuno dei due intervalli negativi, $x^2 - 1$ è decrescente ; la funzione log x conserva la monotonia , mentre la funzione 1 / x la inverte ; dunque F (x) cresce.

INVERSA e IMMAGINE

$$\frac{1}{\log(x^2 - 1)} = k \quad \Leftrightarrow \log(x^2 - 1) = 1/k \quad \text{purché } k \neq 0 \quad \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1 + e^{1/k}} .$$

Dobbiamo vedere se le soluzioni trovate sono accettabili, cioè se stanno nell'intervallo scelto. Ad es.: se l'intervallo è $(\sqrt{2}, +\infty)$, la soluzione negativa è da scartare , mentre quella positiva è accettabile se $1 + e^{1/k} > 2$ e questo accade per $k > 0$. In questo caso l'immagine della funzione è l'intervallo (0 , +∞) ; la funzione risulta iniettiva (e dunque invertibile) e la funzione inversa è data da $F^{-1}(k) = \sqrt{1 + e^{1/k}}$.
Per gli altri intervalli si ragiona in modo analogo (con risultati diversi).

2.

C.E.

$$1 - |1 - x^2| - x > 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \\ x^2 - x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1 - x^2 < 0 \\ x^2 + x - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x < 0 \ \vee \ x > 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x < -1 \ \vee \ x > 1 \\ -2 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1, 0) \cup (-2, -1) .$$

Il C.E. è dunque (-2 , 0) .

3.

MONOTONIA

La successione è sempre definita ; per provare che è decrescente, occorre far vedere che risulta $x_{n+1} < x_n$:

$$\log \frac{n^2 + 2n + 3}{2n^2 + 4n + 1} < \log \frac{n^2 + 2}{2n^2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow (n^2 + 2n + 3)(2n^2 - 1) < (2n^2 + 4n + 1)(n^2 + 2)$$

$$\Leftrightarrow 10n > 5 \quad \text{che è sempre verificata.}$$

PRIMI RISULTATI

$\max x_n = \sup x_n = x_1 = \log 3$, $\min x_n$ non esiste

VERIFICA DELL'ESTREMO INFERIORE

- La condizione $\log \dfrac{n^2 + 2}{2n^2 - 1} \geq \log \dfrac{1}{2}$ deve essere verificata $\forall n$.

  La condizione equivale a $\dfrac{n^2 + 2}{2n^2 - 1} \geq \dfrac{1}{2}$; moltiplicando per i denominatori e semplificando, si ottiene $4 > -1$, che ovviamente è sempre verificata.

- La condizione $\log \dfrac{n^2 + 2}{2n^2 - 1} < \log \dfrac{1}{2} + \varepsilon$ deve essere verificata per almeno n .

  Poiché $\log \dfrac{n^2 + 2}{2n^2 - 1} - \log \dfrac{1}{2} = \log \dfrac{2n^2 + 4}{2n^2 - 1}$, si trova che deve essere $\dfrac{2n^2 + 4}{2n^2 - 1} < e^{\varepsilon}$, da cui $2(e^{\varepsilon} - 1)n^2 > (4 + e^{\varepsilon})$ e quindi $n > \sqrt{(4 + e^{\varepsilon}) / [2(e^{\varepsilon} - 1)]}$. La disequazione studiata ammette dunque infinite soluzioni.

4.

- Per n = 1 l'uguaglianza è verificata , riducendosi a ¼ = ¼ .

- Supponiamola verificata per $n \geq 1$ e deduciamola per n + 1 .

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{3 - 2^k}{4^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{3 - 2^k}{4^k} + \frac{3 - 2^{n+1}}{4^{n+1}} = \frac{2^n - 1}{4^n} + \frac{3 - 2^{n+1} - 1}{4^{n+1}} =$$

$$= \frac{4 \cdot 2^n - 4 + 3 - 2 \cdot 2^n}{4^{n+1}} = \frac{2 \cdot 2^n - 1}{4^{n+1}} = \frac{2^{n+1} - 1}{4^{n+1}}$$

1.

COMPOSIZIONE

$$F(x) = \frac{1}{\log x - 1} .$$

C.E.

$$\begin{cases} x > 0 \\ \log x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0, e) \cup (e, +\infty)$$

MONOTONIA

In ciascuno dei due intervalli , log x è crescente e tale è log x – 1; la funzione 1 / x inverte la monotonia ; dunque F (x) decresce.

INVERSA e IMMAGINE

$$\frac{1}{\log x - 1} = k \quad \Leftrightarrow \quad \log x - 1 = 1/k \quad \text{purché } k \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{1 + 1/k} .$$

Dobbiamo vedere se la soluzione trovata è accettabile, cioè se sta nell'intervallo scelto.
Ad es.: se l'intervallo è $(e, +\infty)$, la soluzione è accettabile se $e^{1+1/k} > e$, il che accade per $1 + 1/k > 1$, cioè per $k > 0$. In questo caso l'immagine della funzione è dunque l'intervallo $(0, +\infty)$; la funzione risulta iniettiva (e dunque invertibile) e la funzione inversa è data da $F^{-1}(k) = e^{1+1/k}$.
Per l'altro intervallo si ragiona in modo analogo (con risultati diversi).

2.

C.E.

$$|4 - x^2| + x - 2 > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ 4 - x^2 + x - 2 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < -2 \ \vee \ x > 2 \\ x^2 - 4 + x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - x - 2 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < -2 \ \vee \ x > 2 \\ x^2 + x - 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ -1 < x < 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x < -2 \ \vee \ x > 2 \\ x < -3 \ \vee \ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty) .$$

Il C.E. è dunque $(-\infty, -3) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)$.

3.

MONOTONIA

La successione è sempre definita ; per provare che è crescente, occorre far vedere che risulta $x_{n+1} > x_n$:

$$\sqrt{\frac{2n^2+4n+1}{n^2+2n+3}} > \sqrt{\frac{2n^2-1}{n^2+2}}$$

$$\Leftrightarrow \ (2n^2+4n+1)(n^2+2) > (2n^2-1)(n^2+2n+3)$$

$$\Leftrightarrow \ 10n > 5 \quad \text{che è sempre verificata.}$$

PRIMI RISULTATI

$\min x_n = \inf x_n = x_1 = 1/\sqrt{3}$, $\max x_n$ non esiste

VERIFICA DELL'ESTREMO SUPERIORE

- La condizione $\sqrt{\dfrac{2n^2-1}{n^2+2}} \le \sqrt{2}$ deve essere verificata $\forall$ n .

  La condizione equivale a $\dfrac{2n^2-1}{n^2+2} \le 2$; moltiplicando per i denominatori e semplificando, si ottiene $-1 \le 4$, che è una identità.

- La condizione $\sqrt{\dfrac{2n^2-1}{n^2+2}} > \sqrt{2} - \varepsilon$ deve essere verificata per almeno n .

  Possiamo supporre $0 < \varepsilon < \sqrt{2}$ ed elevare al quadrato, ottenendo $\dfrac{2n^2-1}{n^2+2} > (\sqrt{2}-\varepsilon)^2$

  Svolgendo i calcoli, si trova che deve essere $\varepsilon(2\sqrt{2}-\varepsilon)n^2 > [1+2(\sqrt{2}-\varepsilon)^2]$. Nell'ipotesi fatta su ε il coefficiente di n^2 è positivo e quindi si trova che deve essere $n > \sqrt{[1+2(\sqrt{2}-\varepsilon)]/[\varepsilon(2\sqrt{2}-\varepsilon)]}$. La disequazione studiata ammette dunque infinite soluzioni.

4.

- Per n = 1 l'uguaglianza è verificata , riducendosi a $-1/9 = -1/9$.

- Supponiamola verificata per $n \ge 1$ e deduciamola per n + 1 .

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{3^k-4}{9^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{3^k-4}{9^k} + \frac{3^{n+1}-4}{9^{n+1}} = \frac{1-3^n}{2\cdot 9^n} + \frac{3^{n+1}-4}{9^{n+1}} =$$

$$= \frac{9-9\cdot 3^n+2\cdot 3\cdot 2^n-8}{2\cdot 9^{n+1}} = \frac{1-3\cdot 3^n}{2\cdot 9^{n+1}} = \frac{1}{2}\ \frac{1-3^{n+1}}{9^{n+1}}$$

1.

COMPOSIZIONE

$$F(x) = \frac{1}{\log^2 x} - 1 = \frac{1 - \log^2 x}{\log^2 x} .$$

C.E.

$$\begin{cases} x > 0 \\ \log x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

MONOTONIA

In $(0, 1)$ $\log x$ è negativo e crescente , $\log^2 x$ è decrescente ; la funzione $1 / x$ inverte la monotonia , mentre la funzione $x - 1$ la conserva ; dunque $F(x)$ cresce.
In $(1, \infty)$ $\log x$ è positivo e crescente , $\log^2 x$ è crescente ; la funzione $1 / x$ inverte la monotonia , mentre la funzione $x - 1$ la conserva ; dunque $F(x)$ decresce.

INVERSA e IMMAGINE

$$\frac{1}{\log(x^2 - 1)} - 1 = k \Leftrightarrow \log^2 x = 1/(1+k) \quad \text{purché } k > -1 \quad \Leftrightarrow x = e^{\pm 1/\sqrt{1+k}} .$$

Dobbiamo vedere se le soluzioni trovate sono accettabili, cioè se stanno nell'intervallo scelto.
Ad es.: se l'intervallo è $(1, +\infty)$, la soluzione con il segno negativo all'esponente è da scartare in quanto minore di 1 , mentre l'altra è accettabile . In questo caso l'immagine della funzione è l'intervallo $(-1, +\infty)$; la funzione risulta iniettiva (e dunque invertibile) e la funzione inversa è data da $F^{-1}(k) = e^{1/\sqrt{1+k}}$.
Per l'altro intervallo si ragiona in modo analogo (con risultati diversi).

2.

C.E.

$$\begin{cases} x^2 + 2x \neq 0 \\ \log_3 \left| x^2 + 2x \right| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 , \ x \neq -2 \\ \left| x^2 + 2x \right| \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 , \ x \neq -2 \\ x^2 + 2x - 3 \leq 0 \\ x^2 + 2x + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \neq 0 , \ x \neq -2 \\ -3 \leq x \leq 1 \\ x \in R \end{cases}$$

Il C.E. è dunque $[-3, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 1]$.

3.

MONOTONIA

La successione è sempre definita ; per provare che è decrescente, occorre far vedere che risulta $x_{n+1} < x_n$:

$$\sqrt{\frac{n^2+2n+3}{2n^2+4n+1}} < \sqrt{\frac{n^2+2}{2n^2-1}}$$

$$\Leftrightarrow\ (n^2+2n+3)(2n^2-1) < (n^2+2)(2n^2+4n+1)$$

$\Leftrightarrow\ 10n > -5$ che è sempre verificata.

PRIMI RISULTATI

$\max x_n = \sup x_n = x_1 = \sqrt{3}$, $\min x_n$ non esiste

VERIFICA DELL'ESTREMO INFERIORE

- La condizione $\sqrt{\dfrac{n^2+2}{2n^2-1}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ deve essere verificata $\forall$ n .

  La condizione equivale a $\dfrac{n^2+2}{2n^2-1} \geq \dfrac{1}{2}$; moltiplicando per i denominatori e semplificando, si ottiene $4 \geq -1$, che è una identità.

- La condizione $\sqrt{\dfrac{n^2+2}{2n^2-1}} < \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \varepsilon$ deve essere verificata per almeno n .

  Possiamo elevare al quadrato, ottenendo $\dfrac{n^2+2}{2n^2-1} < (1/\sqrt{2}+\varepsilon)^2$

  Svolgendo i calcoli, si trova che deve essere $2\varepsilon(\sqrt{2}+\varepsilon)n^2 > [2+(1/\sqrt{2}+\varepsilon)^2]$ e dunque $n > \sqrt{[2+(1/\sqrt{2}+\varepsilon)]/[2\varepsilon(\sqrt{2}+\varepsilon)]}$. La disequazione studiata ammette dunque infinite soluzioni.

4.

- Per n = 1 l'uguaglianza è verificata , riducendosi a $8 = 8$.

- Supponiamola verificata per $n \geq 1$ e deduciamola per n + 1 .

$$\sum_{k=1}^{n+1} (3\cdot 2^{k-1}-1)\,2^{k+1} = \sum_{k=1}^{n} (3\cdot 2^{k-1}-1)\,2^{k+1} + (3\cdot 2^n-1)\,2^{n+2} =$$

$$= 2^{n+2}(2^n-1) + (3\cdot 2^n-1)\,2^{n+2} = 2^{n+2}(4\cdot 2^n-2) =$$

$$= 2^{n+3}(2^{n+1}-1)$$

1.

COMPOSIZIONE

$$F(x) = \log \frac{1}{x^2 - 1} = -\log(x^2 - 1)$$

C.E.

$$x^2 - 1 > 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \iff x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

MONOTONIA

Nell'intervallo positivo $x^2 - 1$ è crescente; log x conserva la monotonia , mentre –x la inverte; dunque F (x) decresce.
Nell'intervallo negativo $x^2 - 1$ è decrescente; log x conserva la monotonia , mentre –x la inverte; dunque F (x) cresce.

INVERSA e IMMAGINE

$$-\log(x^2 - 1) = k \iff x^2 - 1 = e^{-k} \iff x = \pm\sqrt{1 + e^{-k}} \,.$$

Dobbiamo vedere se la soluzione trovata è accettabile, cioè se sta nell'intervallo scelto.
Ad es.: se l'intervallo è (1 , +∞) , la soluzione negativa non è accettabile , mentre quella positiva lo è per ogni valore di k. In questo caso l'immagine della funzione è dunque **R** ; la funzione risulta iniettiva (e dunque invertibile) e la funzione inversa è data da $F^{-1}(k) = \sqrt{1 + e^{-k}}$.
Per l'altro intervallo si ragiona in modo analogo (con risultati diversi).

2.

C.E.

$$\begin{cases} x \neq 0 \;,\; x \neq 1 \\ \log_2 \left| x^2 - x \right| \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 0 \;,\; x \neq 1 \\ x^2 - x \leq 2 \\ x^2 - x \geq -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 0 \;,\; x \neq 1 \\ -1 \leq x \leq 2 \\ x \in R \end{cases}$$

Il C.E. è dunque $[-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2]$.

3.

MONOTONIA

La successione è sempre definita ; per provare che è crescente, occorre far vedere che risulta $x_{n+1} > x_n$:

$$\log \frac{2n^2 + 4n + 1}{n^2 + 2n + 3} > \log \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 2}$$

$\Leftrightarrow \ (2 n^2 + 4 n + 1) (n^2 + 2) < (n^2 + 2 n + 3) (2 n^2 - 1)$

$\Leftrightarrow \ 10 n > 5$ che è sempre verificata.

PRIMI RISULTATI

$\min x_n = \inf x_n = x_1 = \log (1 / 3) = -\log 3$, $\max x_n$ non esiste

VERIFICA DELL'ESTREMO SUPERIORE

- La condizione $\log \dfrac{2 n^2 - 1}{n^2 + 2} \le \log 2$ deve essere verificata $\forall\, n$.

  La condizione equivale a $\dfrac{2 n^2 - 1}{n^2 + 2} \le 2$; moltiplicando per il denominatore e semplificando, si ottiene l'identità $-1 \le 4$.

- La condizione $\log \dfrac{2 n^2 - 1}{n^2 + 2} > \log 2 - \varepsilon$ deve essere verificata per almeno n .

  Poiché $\log \dfrac{2 n^2 - 1}{n^2 + 2} - \log 2 = \log \dfrac{2 n^2 - 1}{2 n^2 + 4}$, si trova che deve essere $\dfrac{2 n^2 - 1}{2 n^2 + 4} < e^{-\varepsilon}$, da cui $2 (1 - e^{-\varepsilon}) n^2 > (1 + 4 e^{-\varepsilon})$ e quindi $n > \sqrt{(1 + 4 e^{-\varepsilon}) / [2 (1 - e^{-\varepsilon})]}$. La disequazione studiata ammette dunque infinite soluzioni.

4.

- Per n = 1 l'uguaglianza è verificata , riducendosi a $-27 = -27$.

- Supponiamola verificata per $n \ge 1$ e deduciamola per $n + 1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} (3^{k+1} - 4 \cdot 3^{2k}) = \sum_{k=1}^{n} (3^{k+1} - 4 \cdot 3^{2k}) + (3^{n+2} - 4 \cdot 3^{2n+2}) =$$

$$= \frac{1 - 3^n}{2} \cdot 3^{n+2} + 3^{n+2} - 4 \cdot 3^{2n+2} = \frac{(3 - 3^n) 3^{n+2} - 8 \cdot 3^{2n+2}}{2} =$$

$$= \frac{(3 - 3^n) 3^{n+2} - 8 \cdot 3^{2n+2}}{2} = \frac{3^{n+3} - 3^2 \cdot 3^{2n+2}}{2} = \frac{3^{n+3}}{2} (1 - 3^{n+1}) .$$