[2]

1. Tenendo conto che il termine sotto radice deve essere positivo:

$$\begin{cases} 2\,\text{sen}\,x - 1 > 0 \\ \sqrt{3}\cos x + 3\,\text{sen}\,x - \sqrt{3} < 0 \end{cases}$$

Svolgimento analogo a quanto visto per [1].
Soluzioni : $\left[\frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi\right) + 2k\pi$.

2. $f(x) = \exp\left(\frac{\lg\sqrt{1+x^2}}{\text{sen}^2 x}\right) \sim \exp\left(\frac{\lg(1+\frac{1}{2}x^2)}{\text{sen}^2 x}\right) \sim e^{\left(\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}\right)} \to e^{\frac{1}{2}}$.

3. Successione ben definita e positiva.
$a_{n+1} < a_n \iff \dots \iff (1+a_n)^{3/4} > 1 \iff a_n > 0$
$a_n > 0 \Rightarrow a_{n+1} > 0$
Poiché $a_1 > 0$, la successione è decrescente ed ha per limite il punto fisso $L=0$

4. Posto $z = re^{i\theta}$, si ha: $\bar{z}^3 = r^3 e^{-3i\theta}$, $z^4 = r^4 e^{4i\theta}$, $-2z^2 = 2r^2 e^{i(2\theta+\pi)}$.
Deve essere $r^7 e^{i\theta} = 2r^2 e^{i(2\theta+\pi)}$, da cui

$$\begin{cases} r^7 = 2r^2 \\ 2\theta + \pi = \theta + 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} r = 0 \text{ (che fornisce } z=0\text{) oppure } r = \sqrt[5]{2} \\ \theta = -\pi + 2k\pi \end{cases}$$

Le soluzioni sono $z=0$, $z = -\sqrt[5]{2}$.

[3]

1. $$\begin{cases} 2\cos x + \sqrt{3} \geq 0 \\ 3\,\text{sen}\,x - \sqrt{3}\cos x - \sqrt{3} > 0 \end{cases} \iff x \in \left(\frac{\pi}{3} + \frac{5}{6}\pi\right] + 2k\pi$$

2. $\lg^2(1+x) \sim x^2$, $\text{sen}^3 x \sim x^3$, $e^{-x^2} - 1 \sim -x^2$; $f(x) \sim \frac{x^2}{-x^2} \to -1$.

3. $a_{n+1} = \frac{1+a_n}{2+a_n}$. Successione ben definita e positiva.
$a_{n+1} < a_n \iff a_n > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$
$a_n > \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow a_{n+1} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
Poiché $a_1 > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, la successione è crescente ed ha per limite il punto fisso $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

4. Posto $z = x+iy$, deve essere $\sqrt{(x+2)^2+y^2} = x^2 - y^2 - 2ixy - 1$, da cui

$$\begin{cases} \sqrt{(x+2)^2+y^2} = x^2-y^2-1 \\ xy = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{y^2+4} = -y^2-1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ |x+2| = x^2-1 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{y^2+4} = -y^2-1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ x < -2 \\ x^2+x+1 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ x \geq -2 \\ x^2-x-3 = 0 \end{cases}$$

Solo il terzo sistema ha soluzioni, date da $x = 1 \pm \sqrt{13}/2$.

[4]

1. $$\begin{cases} \sqrt{3} - \text{sen}\,x - \sqrt{3}\cos x < 0 \\ \sqrt{2}\cos x - 1 > 0 \end{cases} \iff x \in (0, \pi/4) + 2k\pi$$

2. $f(x) = \exp\left(\frac{\lg(1-\text{sen}^2 3x)}{\text{tg}^2 x}\right) \sim \exp\left(\frac{-\text{sen}^2 3x}{\text{tg}^2 x}\right) \sim \exp\left(\frac{-9x^2}{x^2}\right) \to e^{-9}$.

3. Ben definita e positiva.
$a_{n+1} < a_n \iff a_n > 2+\sqrt{10}$.
$a_n > 2+\sqrt{10} \Rightarrow a_{n+1} > 2+\sqrt{10}$.
Poiché $a_1 > 2+\sqrt{10}$, la successione è decrescente ed ha come limite il punto fisso $2+\sqrt{10}$.

4. Posto $z = re^{i\theta}$, deve essere $r^2 e^{-2i\theta} r^4 e^{4i\theta} = 16 r^2 e^{i(-2\theta+\pi)}$ cioè $r^6 e^{2i\theta} = 16 r^2 e^{i(\pi-2\theta)}$,
da cui $r = 0$ (che fornisce $z=0$) oppure $r = 2$ e $2\theta = \pi - 2\theta + 2k\pi$ cioè $\theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.
Le soluzioni sono $z=0$, $z = \sqrt{2}(1 \pm i)$, $z = \sqrt{2}(-1 \pm i)$.