Prova scritta parziale #2 del 18.12.09

Soluzioni

[1]

1. Per $x \to 0$, $\operatorname{sen} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} \to 0$, $x \operatorname{sen}\frac{1}{x} \to 0$ (prodotto di una funzione infinitesima per una limitata).
Inoltre $\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x}) \sim \operatorname{sen}(x \operatorname{sen}\frac{1}{x}) \sim x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$.
Il limite vale 1.

2. Scriviamo l'equazione nella forma $z^3|z| = -8\bar{z}$ e utilizziamo la rappresentazione esponenziale. ponendo $z = re^{i\theta}$: deve essere $r^4 e^{3i\theta} = 8re^{i(\pi-\theta)}$, da cui

$$\begin{cases} r^4 = 8r \\ 3\theta = \pi - \theta + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow r = 0 \text{ (cioè } z=0\text{) oppure } \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ con } k = 0, 1, 2, 3.$$

Le soluzioni non nulle sono $\sqrt{2}(1 \pm i)$, $\sqrt{2}(-1 \pm i)$.

3. La funzione è definita per $x \in (-1, 1)$.
Fissato $\varepsilon > 0$, dobbiamo provare che il sistema

$$-\varepsilon < \lg\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} < \varepsilon$$

è verificato in un intorno di $x_0 = 0$.

- $\lg\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} < \varepsilon \iff \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} < e^{\varepsilon} \iff \frac{1+x}{1-x} < e^{2\varepsilon} \iff x < \frac{e^{2\varepsilon}-1}{e^{2\varepsilon}+1}$.
- $\lg\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} > -\varepsilon \iff \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} > e^{-\varepsilon} \iff \frac{1+x}{1-x} > e^{-2\varepsilon} \iff x > \frac{e^{-2\varepsilon}-1}{e^{-2\varepsilon}+1}$.

Trovato l'insieme delle soluzioni, rimane da verificare che è

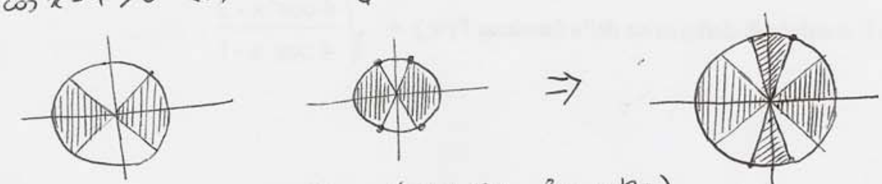
$$\frac{e^{-2\varepsilon}-1}{e^{-2\varepsilon}+1} < 0 < \frac{e^{2\varepsilon}+1}{e^{2\varepsilon}+1}.$$

Tenendo conto del fatto che è $\varepsilon > 0$, la verifica è immediata.

4. Deve essere $\frac{4\cos^2 x - 2}{4\cos^2 x - 1} \geq 0$.

$4\cos^2 x - 2 \geq 0 \iff \cos^2 x \geq \frac{1}{2} \iff \cos x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \lor \cos x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$4\cos^2 x - 1 > 0 \iff \cos^2 x > \frac{1}{4} \iff \cos x > \frac{1}{2} \lor \cos x < -\frac{1}{2}$.



$$x \in \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right] \cup \left(\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{2}{3}\pi + k\pi\right).$$

1. Per $x \to +\infty$, $\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x} \sim \frac{\operatorname{sen} x}{x} \to 0$, dunque $f(x) \sim \frac{x \frac{\operatorname{sen} x}{x}}{\operatorname{sen} x} \to 1$.

2. Posto $z = x + iy$, si ottiene $\sqrt{x^2+y^2} = 2i(x-1) - 2y$. Deve dunque essere:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = -2y \\ x-1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{y^2+1} = -2y \\ x = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y \leq 0 \\ 4y^2 = y^2+1 \end{cases} \iff z = 1 - \frac{i}{\sqrt{3}}.$$

3. La funzione è definita per $x \in (-4,4)$.
Fissato $\varepsilon > 0$, dobbiamo provare che il sistema

$$-\varepsilon < \lg\sqrt{\frac{4+x}{4-x}} - \frac{1}{2}\lg 3 < \varepsilon$$

ovvero

$$-\varepsilon < \frac{1}{2}\lg\left(\frac{4+x}{4-x}\right) - \frac{1}{2}\lg 3 < \varepsilon$$

ovvero

$$-\varepsilon < \frac{1}{2}\lg\frac{4+x}{3(4-x)} < \varepsilon$$

è verificato in un intorno di $x_0 = 2$.

- $\frac{1}{2}\lg\frac{4+x}{3(4-x)} < \varepsilon \iff \frac{4+x}{3(4-x)} < e^{2\varepsilon} \iff x < \frac{4(3e^{2\varepsilon}-1)}{3e^{2\varepsilon}+1}$
- $\frac{1}{2}\lg\frac{4+x}{3(4-x)} > -\varepsilon \iff \frac{4+x}{3(4-x)} > e^{-2\varepsilon} \iff x > \frac{4(3e^{-2\varepsilon}-1)}{3e^{-2\varepsilon}+1}$.

Rimane da provare che è

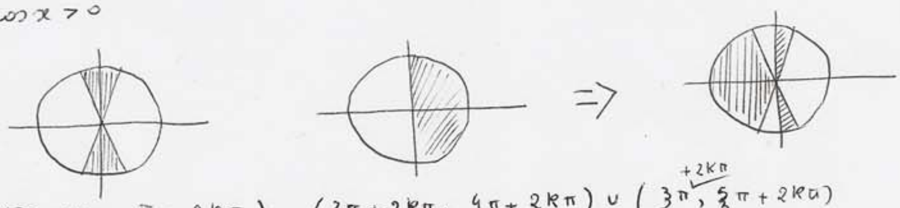
$$\frac{4(3e^{-2\varepsilon}-1)}{3e^{-2\varepsilon}+1} < 2 < \frac{4(3e^{2\varepsilon}-1)}{3e^{2\varepsilon}+1}.$$

Tenendo conto del fatto che è $\varepsilon > 0$, la verifica è immediata.

4. Deve essere $3\cos x - \operatorname{sen} x \operatorname{tg} x > 0 \iff 3\cos x - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} > 0 \iff$
$\frac{3\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x} > 0 \iff \frac{3 - 4\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} > 0$.

$3 - 4\operatorname{sen}^2 x > 0 \iff \operatorname{sen}^2 x < \frac{3}{4} \iff -\frac{\sqrt{3}}{2} < \operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\cos x > 0$



$$\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \frac{5}{3}\pi + 2k\pi\right)$$

1. Per $x \to +\infty$, $\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x} \sim \frac{\operatorname{sen} x}{x} \to 0$; dunque $f(x) \sim \frac{x \operatorname{sen} x / x}{\operatorname{sen} x} \to 1$.

2. Scriviamo l'equazione nella forma $|z|^4 = -i z^2$ e utilizziamo la rappresentazione esponenziale, ponendo $z = re^{i\theta}$: deve essere $r^4 e^{i0} = r^2 e^{i(2\theta - \frac{\pi}{2})}$, da cui
$\begin{cases} r^4 = r^2 \\ 2\theta - \frac{\pi}{2} = 2k\pi \end{cases} \iff \underset{(\text{cioè } z=0)}{r=0}$ oppure $\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$ con $k = 0, 1$.
Le soluzioni non nulle sono $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$.

3. La funzione è definita per $x > 0$, $x \neq 1/\sqrt{e}$. Dobbiamo provare che, fissato $\varepsilon > 0$, il sistema

$$-\varepsilon < \frac{\lg x + 1}{2 \lg x + 1} - \frac{1}{2} < \varepsilon$$

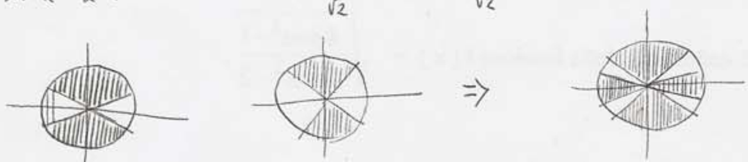
è verificato in un intorno di $+\infty$.
Possiamo riscrivere il sistema nella forma

$$-\varepsilon < \frac{1}{2 \lg x + 1} < \varepsilon,$$

e supporre $x > 1/\sqrt{e}$, in modo da rendere positivo il denominatore. Sotto questa ipotesi la prima disequazione è sempre verificata; la seconda equivale a $2 \lg x + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \iff x > e^{\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}}$. Poichè $e^{\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}} > \frac{1}{\sqrt{e}}$, il sistema è risolto per $x > e^{\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}}$, che è un intorno di $+\infty$.

4. Deve essere $\frac{4 \operatorname{sen}^2 x - 1}{4 \operatorname{sen}^2 x - 2} \geq 0$.

$4 \operatorname{sen}^2 x - 1 \geq 0 \iff \operatorname{sen} x \leq -\frac{1}{2} \vee \operatorname{sen} x \geq \frac{1}{2}$
$4 \operatorname{sen}^2 x - 2 > 0 \iff \operatorname{sen} x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \vee \operatorname{sen} x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$



$x \in \left[-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right] \cup \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3}{4}\pi + k\pi\right)$

[4]

1. Per $x \to +\infty$, $\operatorname{sen}\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$, $\operatorname{sen} e^{-x} \sim e^{-x}$; $f(x) \sim x e^{x} \cdot \frac{1}{x} e^{-x} \to 1$.

2. Posto $z = x + iy$, deve essere $\sqrt{(x-1)^2+y^2} = 2y - 2ix$. Dunque:

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ \sqrt{(x-1)^2+y^2} = 2y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{y^2+1} = 2y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y \geq 0 \\ 3y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \iff z = \frac{i}{\sqrt{3}}$$

3. La funzione è definita per $x > 0$, $x \neq e^{-1}$.
Possiamo supporre $x \in (0, 1/e)$; il limite ha senso solo per $x \to 0^+$.
Fissato $\varepsilon > 0$, dobbiamo provare che il sistema

$$-\varepsilon < \frac{2\lg x + 1}{\lg x + 1} - 2 < \varepsilon$$

è verificato in un intorno destro di 0.
Possiamo riscrivere il sistema nella forma

$$-\varepsilon < \frac{-1}{\lg x + 1} < \varepsilon .$$

Tenendo conto che – nell'intervallo scelto – è $\lg x + 1 < 0$, la prima disequazione è verificata, mentre la seconda equivale a
$-1 > \varepsilon(\lg x + 1) \iff \lg x < -1 - \frac{1}{\varepsilon} \iff x < e^{-1-\frac{1}{\varepsilon}}$.
Tenendo conto del fatto che è $e^{-1-\frac{1}{\varepsilon}} < e^{-1}$, il sistema è verificato per $x \in (0, e^{-1-\frac{1}{\varepsilon}})$.

4. Deve essere

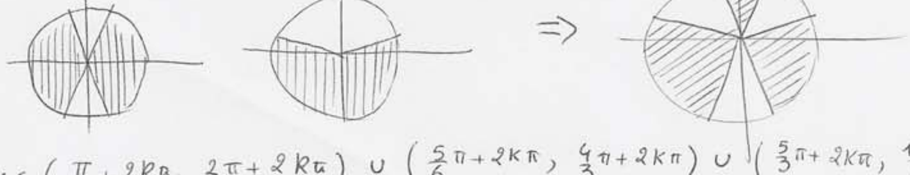
$$\frac{1}{2} + \operatorname{sen} x + \frac{1}{1 - 2\operatorname{sen} x} > 0$$

ovvero

$$\frac{3 - 4\operatorname{sen}^2 x}{2(1 - 2\operatorname{sen} x)} > 0.$$

$3 - 4\operatorname{sen}^2 x > 0 \iff \operatorname{sen}^2 x < \frac{3}{4} \iff -\frac{\sqrt{3}}{2} < \operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

$1 - 2\operatorname{sen} x > 0 \iff \operatorname{sen} x < \frac{1}{2}$



$$x \in \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{5}{3}\pi + 2k\pi, \frac{13}{6}\pi + 2k\pi\right)$$