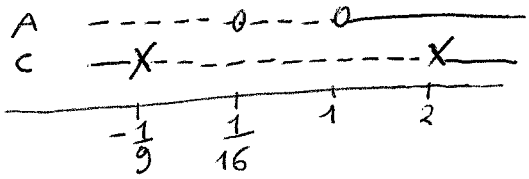
soluzioni

1. Poiché $i^2=-1$, possiamo scrivere:

$$z=\frac{A+i^2B+iA+iB}{C(i+1+i^2\sqrt{3}+i\sqrt{3})}(1+i\sqrt{3})=\frac{(A+iB)\cancel{(1+i)}\cancel{(1+i\sqrt{3})}}{C\cancel{(1+i\sqrt{3})}\cancel{(1+i)}}$$

Deve dunque essere

$$\frac{A}{C}=\frac{(x-1)(16x-1)^2}{9x^2-17x-2}\le 0.$$



$D=(-\infty,-1/9)\cup[1,2)\cup\{1/16\}$.

$$\sqrt[n]{|a_n|}=\left(\frac{n+2}{n}\right)^n|x|=\left(1+\frac{2}{n}\right)^n|x|\to e^2|x|.$$

La serie converge per $|x|<1/e^2$.

Rimangono da esaminare i casi $x=\pm 1/e^2$:

$$|a_n|=\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}e^{-2n}\Rightarrow \lg|a_n|=n^2\lg\left(1+\frac{2}{n}\right)-2n\sim$$

$$\sim n^2\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}\right)-2n\to -2.$$

Dunque $|a_n|\not\to 0$ e la serie non converge.

$F=(-1/e^2,\ 1/e^2)$

$D\cap F=(-1/e^2,-1/9)\cup\{\frac{1}{16}\}$.

max = sup = $1/16$, inf = $-1/e^2$, min non $\exists$.

2. Posto $\sqrt{\lg x}=t$, $dx/2x\sqrt{\lg x}=dt$:

$$\int_0^\infty\frac{2t+1}{1+(t^2+t+1)^2}\,dt.$$

L'integrale è improprio solo per la presenza dell'estremo $+\infty$. Per $t\to+\infty$ $f(t)\sim\frac{2t}{t^4}=\frac{2}{t^3}$ che è un infinitesimo di ordine 3: dunque l'integrale esiste. Per il calcolo, poniamo ulteriormente $t^2+t+1=z$, $(2t+1)\,dt=dz$:

$$\int_1^\infty\frac{dz}{1+z^2}.$$

(avremmo potuto studiare l'integrabilità a questo punto, invece che al passo precedente: $f(z)\sim 1/z^2$, infinitesimo di ordine 2).

Il valore dell'integrale è $[\operatorname{arctg} z]_1^\infty=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$.

3. Posto (secondo le notazioni standard) $a(x)=1$, $A(x)=x$, $e^{A(x)}=e^{x}$, e moltiplicando ambo i membri per e^{x}:

$$(e^{x}y)' = 4x^{3} \rightarrow e^{x}y = x^{4}+c \rightarrow y=(x^{4}+c)e^{-x}.$$

La C.I. si verifica per $c=1$.

Dunque $f(x) = (x^{4}+1)e^{-x}$.

$$f'(x) = 4x^{3}e^{-x} - f(x) = (-x^{4}+4x^{3}-1)e^{-x}.$$

$$f'(1) = \frac{2}{e}, \quad f'(2) = \frac{15}{e^{2}}.$$

Poiché $\frac{2}{e} < \frac{17-2e}{e^{2}} < \frac{15}{e^{2}}$, per il teorema dei valori intermedi $\exists\, \xi \in (1,2) : f'(\xi) = \frac{17-2e}{e^{2}}$.

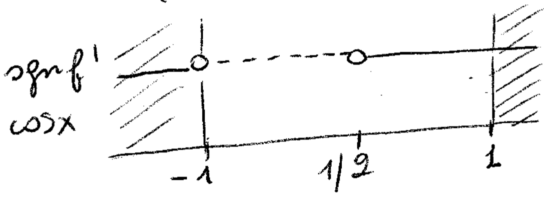
1!:' ~W/(-t) IT

4. La funzione è π-periodica: possiamo dunque limitarci a studiarla per $x \in [0,\pi)$ (intervallo in cui il valore assoluto è superfluo).

$$f(x) = \operatorname{sen} x\,(1+\cos x), \quad x \in [0,\pi].$$

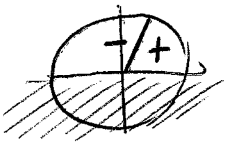
$f(0) = f(\pi) = 0$; la fz. è positiva

$$f'(x) = \cos x\,(1+\cos x) - \operatorname{sen}^{2} x = 2\cos^{2}x + \cos x - 1.$$



$x = \frac{\pi}{3}$ punto di max.

$f'(0) = 2 \quad f'(\pi) = 0$



$$f''(x) = -\operatorname{sen} x\,(4\cos x + 1)$$