Soluzioni - [A]

1.

Integrando per parti: $\frac{x^2}{2}\log\frac{1+x}{3+4x^2}$ - $\int \frac{x^2}{2}\,\frac{4x^2-8x-5}{3+4x^2}\,dx$.

Per studiare l'integrale della funzione razionale, occorre prima eseguire l'algoritmo della divisione.

$$\frac{x^2}{2}\log\frac{1+x}{3+4x^2} - \frac{1}{2}\int(4x+2)\,dx + \frac{1}{2}\int\frac{x^2+18x+6}{(1+x)(3+4x^2)}\,dx$$

Proseguendo con la scomposizione di Hermite:

$$\frac{x^2}{2}\log\frac{1+x}{3+4x^2} - \frac{1}{2}(2x^2+2x) + \frac{1}{2}\int\left(\frac{-11/7}{1+x} + \frac{51x/7 + 75/7}{3+4x^2}\right)dx$$

A questo punto si procede nel modo consueto.

2.

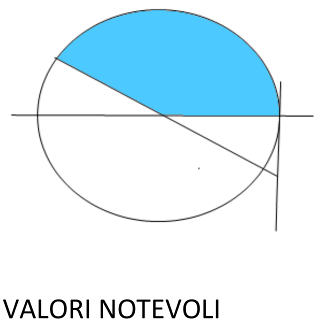
La funzione è 2π – periodica (quindi possiamo limitarci a studiarla in un intervallo di ampiezza il periodo; scegliamo [- π , π]); la funzione è pari (quindi possiamo limitarci a studiarla per $x \geq 0$) ; in conclusione la studiamo in [0 , π]. In questo intervallo il valore assoluto diventa superfluo.

SEGNO

La disequazione 2 senx + cosx ≥ 0 è banalmente verificata in [0 , π/2].

In (π/2 , π] equivale a tgx ≥ -1/2 ed è verificata in (π/2 , π – arctg 1/2].

La risoluzione geometrica della disequazione è riassunta nella figura successiva



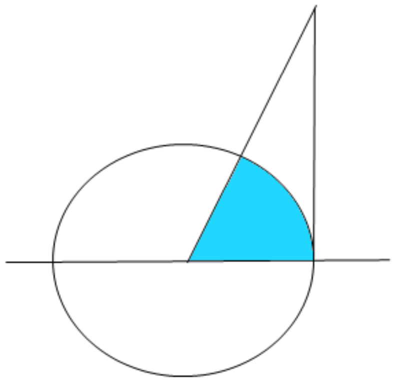
VALORI NOTEVOLI

f (0) = 1 , f (π/2) = 2 , f (π) = -1

DERIVATA

f' (x) = 2 cosx – senx

La derivata è positiva in [0 , arctg 2] (Vedi figura)



DERIVATA SECONDA

f “ (x) = - 2 senx - cosx

La derivata seconda è positiva in [π – arctg 1/2 , π].

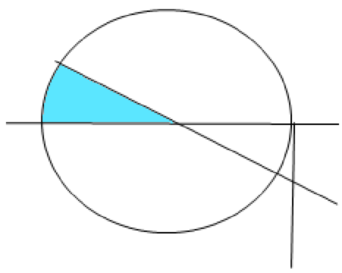
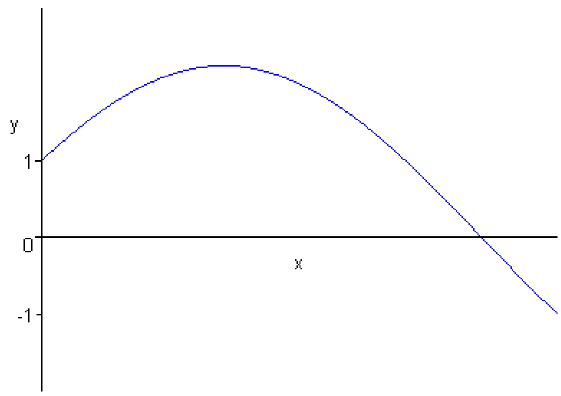
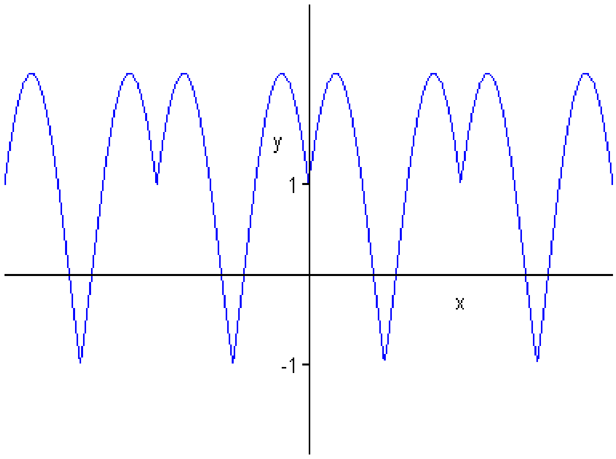


GRAFICO nell’intervallo [- π , π]



GRAFICO



Si rileva la presenza di punti angolosi di non derivabilità per x = k π.

3.

Applicando il criterio della radice, si ottiene:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{n^2}{n+2}}\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| \approx \sqrt[n]{n}\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| \to \left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|$$

Poiché il limite trovata è sempre minore di 1, la serie converge per ogni valore di x.

4.

Per $x \to 0$ $f(x) \approx \dfrac{k}{x^{2\alpha-4}}$; l'integrale esiste se $2\alpha - 4 < 1$, cioè se $\alpha < 5/2$.

5.

L'equazione ha senso se $-1 \le y \le 1$.

Le funzioni $y = \pm 1$ sono soluzioni costanti dell'equazione (ma non verificano la C.I.)

Separando le variabili e integrando, si ottiene :

$$-\sqrt{1-y^2} = x - c \quad \leftrightarrow \quad \sqrt{1-y^2} = c - x \qquad \text{con}\ c - x > 0$$

Elevando al quadrato :

$y^2 = 1 - (c - x)^2 \quad \leftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{1 - (c - x)^2}$ con $0 < c - x < 1$, cioè $c - 1 < x < c$.

Imponendo la C.I. nell'integrale implicito, si ottiene c = 1.

Le due funzioni così ottenute : y = $y = \pm\sqrt{4x - x^2}$ per $0 < x < 1$, si raccordano con l'una o l'altra delle soluzioni costanti per $x > 1$, ma non sono derivabili per $x = 0$ (come è invece richiesto per le soluzioni dell'equazione differenziale).