Soluzioni

1. L'equazione ammette le soluzioni costanti $y=0$, $y=2$.
Data la C.I. cerchiamo soluzioni con $0<y<2$.
Separando le variabili e integrando:

$$\int \frac{dy}{y(y-2)} = \int dx \Rightarrow \frac{1}{2}\lg\left|\frac{y-2}{y}\right| = x+c \Rightarrow \lg\frac{2-y}{y} = 2x+2c \Rightarrow$$

$$y = \frac{2}{Ke^{2x}+1} \quad (\text{con } K = e^{2c}).$$

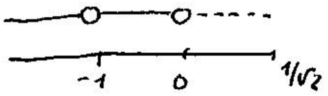
La condizione $0<y<2$ è verificata $\forall x\in\mathbb{R}$; le soluzioni sono dunque definite $\forall x\in\mathbb{R}$. Imponendo la C.I., si trova che deve essere $K=1$:

$$y = \frac{2}{e^{2x}+1}.$$

2. C.E. $\sqrt{|x^2-1|} > x \iff x<0 \vee \begin{cases} x\geq 0 \\ |x^2-1|>x^2 \end{cases} \iff x<0 \vee \begin{cases} x\geq 0 \\ x^2-1\geq x^2 \end{cases} \vee \begin{cases} x\geq 0 \\ x^2-1\leq -x^2 \end{cases}$

$x\in\left(-\infty, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

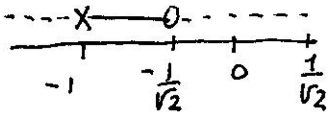
SGN $f(x)\geq 0 \iff \sqrt{|x^2-1|}\geq x+1 \iff x\leq -1 \vee \begin{cases} x>1 \\ |x^2-1|\geq x^2+2x+1 \end{cases}$



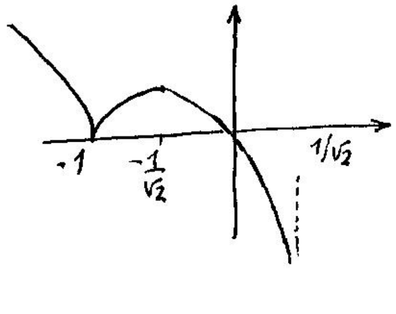
LIM per $x\to-\infty$ $f(x)\to+\infty$ (senza asintoto)
per $x\to\frac{1}{\sqrt{2}}$ $f(x)\to-\infty$ (as. verticale)

DRV $f'(x) = \left(\frac{x\,\mathrm{sgn}(x^2-1)}{\sqrt{|x^2-1|}} - 1\right) \Big/ \left(\sqrt{|x^2-1|} - x\right)$

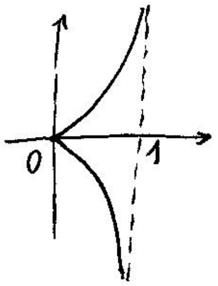
$f'(x)\geq 0 \iff x\,\mathrm{sgn}(x^2-1)\geq\sqrt{|x^2-1|} \iff \begin{cases} x\,\mathrm{sgn}(x^2-1)\geq 0 \\ x^2\geq |x^2-1| \end{cases}$



$x=-1$ cuspide



3.



$$A = 2\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

L'integrale esiste perché per $x\to 1$ la funzione è un infinito di ordine $1/2$ (dunque <1).
Ponendo $\sqrt{1-x}=t$, e dunque $x=1-t^2$, $dx=-2t\,dt$:

$$A = 4\int_0^1 (1-t^2)\,dt = \frac{8}{3}$$

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$ $\qquad \displaystyle\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|^{2n+3}(2n+1)(2n+2)}{|x|^{2n+1}(2n+3)(2n+4)} \to x^2$

La serie converge per $-1<x<1$.
Per $x=\pm 1$, $a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \sim \frac{1}{4n^2}$ e la serie converge.