Esercizi di preparazione al compito parziale #3

1.

Enunciare il teorema di Rolle. Data la funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{se } -3 \leq x \leq 0 \\ 2x^2 + a\,x & \text{se } 0 < x \leq 3/2 \end{cases}$ dire per quali valori del parametro a verifica le ipotesi del teorema. Successivamente trovare i punti la cui esistenza è assicurata dal teorema stesso.

2.

Data la funzione $f(x) = (\cos x)^{1/\operatorname{tg} x}$, dire se si può prolungare per continuità in x = 0. In caso affermativo dire se la funzione così prolungata risulta anche derivabile nello stesso punto.

3.

Data la funzione $\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{1}{x}$, verificare che è dispari; successivamente studiarne le principali proprietà e tracciarne il grafico.

4.

Studiare la funzione $\arccos \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$ e tracciarne il grafico.

5.

Calcolare il limite per x →0 delle seguenti funzioni, usando la formula di Taylor:

$$\frac{\sqrt[3]{1+3x} - x - \cos x}{e^x - e^{-x} - 2\log(1+x)} \quad , \quad \left(\frac{\operatorname{tg}(x^2)}{x\ \operatorname{sen} x}\right)^{1/x^2} .$$

6.

Stimare l'errore massimo che si commette approssimando la funzione $\log\frac{1+x}{1-x}$ con 2 x nell'intervallo [0 , 1/5] . Sugg.: la funzione data è dispari; il polinomio dato è l'approssimazione al <u>secondo</u> ordine.

7.

Trovare la minima distanza del punto P = (a , 0) (con a > 0) dai punti della curva di equazione $x^2 - y^2 = 1$.
Sugg.: basta considerare i punti nel primo quadrante .
(R.: se a > 2 , x = a / 2 ; se a ≤ 2 , x = 1) .

8.

Provare che l'equazione $2^x + x = 0$ ha una ed una sola soluzione. Approssimarla con due iterazioni del metodo delle tangenti di Newton.