Appunti sugli integrali doppi e tripli

0. Alcuni richiami per funzioni di una variabile reale

0.1 Uniforme continuità

Una funzione f: A $\rightarrow$ **R** è continua in A se è continua in ogni punto dell'insieme, cioè se

$$\forall x_0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \, \delta > 0 :$$

$$\forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

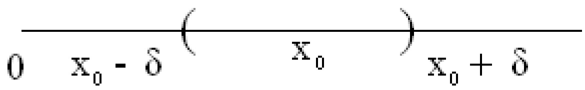
La costante δ misura quanto vicini ad x_0 devono essere i valori di x perché i corrispondenti valori f (x) distino da f (x_0) meno di ε; in termini di intorni, δ è il raggio dell'intorno di centro x_0 in cui far variare x in modo che i valori f (x) cadano nell'intorno di centro f (x_0) e raggio ε .

Fissata la funzione f, il raggio δ dipende sia da ε che $x_{0.}$

La dipendenza da ε è facile da capire: quanto più vicini ad f (x_0) vogliamo che siano i valori f (x), tanto più vicini ad x0 dobbiamo scegliere i valori x.

Meno evidente è la dipendenza dal punto x_0 : verifichiamola con un esempio, esaminando la funzione f (x) = x^2, $x \in$ **R.**

Poiché la funzione è pari, possiamo limitarci a studiarla per $x \geq 0$.



Dalla maggiorazione:

$$|x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \, |x + x_0| < \delta(2x_0 + \delta)$$

segue che è $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$ se scegliamo δ tale che risulti $\delta(2x_0 + \delta) = \varepsilon$, cioè

$$\delta = \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - x_0 \, .$$

Dall'espressione trovata è evidente la dipendenza di δ da ε e da x_0 : per indicare questa dipendenza scriveremo $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$.

Se ci limitiamo a considerare un numero finito di punti di continuità $x_1, \ldots, x_n$, prendendo il più piccolo tra $\delta(\varepsilon, x_1), \ldots, \delta(\varepsilon, x_n)$, riusciamo ad eliminare la dipendenza di δ dal punto.

Per un insieme infinito A siamo portati a prendere

$$\delta(\varepsilon) = \inf_{x \in A} \delta(\varepsilon, x)$$

purché risulti $\delta(\varepsilon) > 0$.

Quando questo accade, diciamo che la funzione f è **uniformemente continua** in A :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 :$$

$$\forall x, x_0 \in A \quad |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

Un esempio banale di funzione uniformemente continua è dato dalla funzione identica $f(x) = x$, $x \in \mathbf{R}$: in questo caso $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$.

Un esempio meno banale, è fornito dalla funzione $f(x) = \text{sen}\, x$, $x \in \mathbf{R}$; essendo:

$$|\text{sen}\, x - \text{sen}\, x_0| = \left| 2 \ \text{sen} \frac{x - x_0}{2} \ \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq |x - x_0| ,$$

segue che anche in questo caso la definizione di uniforme continuità è verificata con $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$.

Non tutte le funzioni continue in un insieme lo sono in modo uniforme.

Ad esempio, la funzione $f(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$ non è uniformemente continua nel suo dominio; infatti la funzione

$$\delta = \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - x_0$$

è positiva e per $x_0 \to +\infty$ si ha $\delta \to 0$: dunque $\inf_{x \in A} \delta(\varepsilon, x) = 0$.

Un altro modo per stabilire che questa funzione non è uniformemente continua nel suo dominio è il ragionamento per assurdo: se lo fosse, preso x_0 arbitrario e posto $x = x_0 + \delta / 2$ nella definizione, dovrebbe valere

$$\left| (x_0 + \delta/2)^2 - x_0^2 \right| < \varepsilon \quad \forall x_0 \in R$$

cioè

$$\left| \delta^2/4 + \delta x_0 \right| < \varepsilon \quad \forall x_0 \in R .$$

Questo è assurdo, perché per $x_0 \to +\infty$ risulta $\left| \delta^2/4 + \delta x_0 \right| \to +\infty$.

Se invece restringiamo la funzione $f(x) = x^2$ ad un qualunque insieme limitato (ad esempio, per fissare le idee, all'intervallo [0, a]), la definizione di uniforme continuità è verificata. Infatti la funzione

$$\delta = \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - x_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{x_0^2 + \varepsilon} + x_0}$$

è decrescente rispetto ad x_0 e quindi

$$\inf_{x \in A} \delta(\varepsilon, x) = \sqrt{a^2 + \varepsilon} - a .$$

Questo esempio mostra come l'uniforme continuità dipenda anche dall'insieme (infinito) in cui si consideri la funzione.

Una condizione sufficiente a garantire l'uniforme continuità di una funzione è contenuto nel seguente teorema:

- **Teorema di Heine – Cantor**

Le funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato [a, b] sono uniformemente continue.

(La dimostrazione è fatta per assurdo e utilizza il teorema di Bolzano-Weierstrass sulla possibilità di estrarre una successione convergente da una limitata).

La definizione di uniforme continuità e il teorema di Heine-Cantor si estendono in modo naturale alle funzioni di n variabili reali.

Una funzione $f : A \subset R^n \to R$ si dice **uniformemente continua** in A se

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 :$$

$$\forall X, X_0 \in A \quad \| X - X_0 \| < \delta \;\Rightarrow\; | f(X) - f(X_0) | < \varepsilon .$$

- **Teorema di Heine – Cantor per funzioni di n variabili**

Le funzioni continue su un compatto di R^n sono uniformemente continue.

0.2 L’integrale di Riemann per funzioni di una variabile

Data una funzione $f : [a , b] \to R$ limitata, l’integrale è definito in modo che per funzioni di segno positivo possa essere ragionevolmente assunto come misura dell’area del sottografico o trapezoide; la definizione però si deve poter estendere alle funzioni di segno qualunque, anche se in questo caso si perde l’interpretazione geometrica.

Per arrivare a questa definizione, si procede a dividere l’intervallo in sottointervalli mediante bisezioni successive; al passo n-esimo si determina una partizione in 2^n sottointervalli di ampiezza $(b - a) / 2^n$. Se L_k e l_k indicano rispettivamente l’estremo superiore ed inferiore della funzione nel sottointervallo k-esimo, costruiamo le seguenti somme (dette rispettivamente somma integrale superiore e inferiore al passo n-esimo):

$$S_n = \sum_{k=1}^{2^n} L_k \, (b - a) / 2^n \qquad\qquad s_n = \sum_{k=1}^{2^n} l_k \, (b - a) / 2^n \, .$$

In caso di funzione positiva, le due somme rappresentano l’area di un plurirettangolo, in un caso circoscritto al trapezoide (e dunque lo contiene), nell’altro inscritto (e dunque ne è contenuto).

Ovviamente ad ogni passo è $s_n \le S_n$; inoltre le due successioni sono monotòne: s_n è crescente, S_n decrescente. In quanto tali entrambe ammettono limite, necessariamente finito.

La funzione si dice integrabile se i limiti delle due successioni coincidono; in tal caso si definisce integrale della funzione il valore comune ai due limiti.

- **Teorema (integrabilità delle funzioni continue)**

  Le funzioni continue in $[a , b]$ sono integrabili.

dimostrazione

Occorre provare che, fissato $\varepsilon > 0$, risulta $S_n - s_n < \varepsilon$ definitivamente. La dimostrazione fa uso della uniforme continuità e del teorema di Weierstrass (per cui gli estremi superiori ed inferiori che compaiono nelle somme integrali in realtà sono massimi e minimi).

Indicata con $\delta_{\varepsilon / (b - a)}$ la costante di uniforme continuità associata ad $\varepsilon /(b - a)$, prendiamo una partizione dell'intervallo in modo che risulti $(b - a) / 2^n < \delta_{\varepsilon / (b - a)}$; questo è definitivamente vero. Di conseguenza:

$$S_n - s_n = \sum_{k=1}^{2^n} \left(L_k - l_k \right)(b - a) / 2^n = \sum_{k=1}^{2^n} \left(f (s_k) - f (t_k) \right)(b - a) / 2^n \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{2^n} \frac{\varepsilon}{b - a} (b - a) / 2^n = \varepsilon .$$

La dimostrazione si adatta abbastanza facilmente al caso di funzioni limitate che sono continue eccetto un numero finito di punti. Quello che serve per adattare la dimostrazione è che l'insieme dei punti di discontinuità abbia la seguente proprietà:

Insiemi E di misura nulla secondo Peano-Jordan

$$\forall \varepsilon > 0 ,\ \exists I_1 , \dots , I_n \text{ intervalli aperti : } \bigcup_{k=1}^{n} I_k \supset E ,\ \sum_{k=1}^{n} \operatorname{mis} I_k < \varepsilon$$

(dove mis I_k indica la lunghezza dell'intervallo I_k).

Questa condizione sull'insieme dei punti di discontinuità è sufficiente a garantire l'integrabilità di una funzione limitata e, ad esempio, è verificata dagli insiemi finiti.

Una condizione più precisa – necessaria e sufficiente – coinvolge gli

Insiemi E di misura nulla secondo Lebesgue

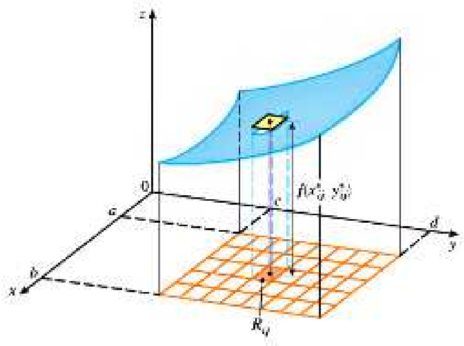
$$\forall \varepsilon > 0 ,\ \exists I_n \text{ intervalli aperti (con } n \in \mathbb{N} \text{ : } \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset E ,\ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{mis} I_n < \varepsilon .$$

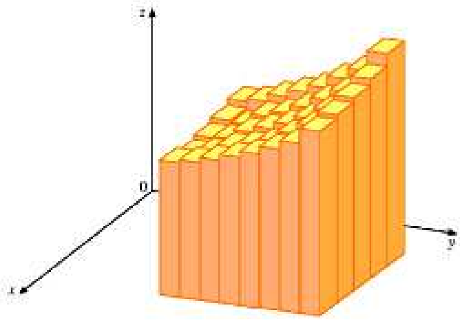
1. Integrali doppi

1.1 Integrale su un rettangolo

Se $f(x,y)$ è una funzione continua sul rettangolo $R = [a, b] \times [c, d]$, l'integrale doppio $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$ è un numero definito in modo tale che, nel caso di funzione a segno positivo, possa essere ragionevolmente assunto come misura del volume della regione di spazio compresa tra il grafico e il piano xy (sottografico o cilindroide); la definizione deve però potersi estendere al caso di funzioni di segno qualunque, pur perdendo l'interpretazione geometrica.

Il procedimento che si segue è analogo a quello visto per funzioni di una variabile. Si divide entrambi gli intervalli [a, b] e [c , d] in n intervalli di uguale lunghezza: questi individuano una partizione del rettangolo in n^2 rettangoli di uguale area; su questa partizione si costruisce la somma integrale superiore S_n e quella inferiore s_n. Nel caso di funzioni di segno positivo queste somme rappresentano il volume di un insieme di parallelepipedi, circoscritti o inscritti al cilindroide. Utilizzando la continuità uniforme della funzione, si prova che le due successioni hanno lo stesso limite: questo valore definisce l'integrale doppio e – nel caso di funzioni positive – il volume del cilindroide.





1.2 Formula di riduzione

Se $f(x,y)$ è una funzione continua sul rettangolo $R = [a, b] \times [c, d]$, l'integrale doppio può essere calcolato mediante due successivi integrali semplici (cioè in una sola variabile) :

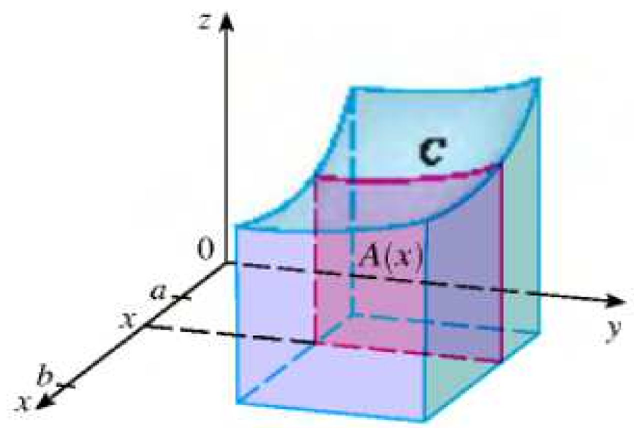
- $$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$$

oppure, invertendo l'ordine di integrazione.

- $$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx \quad .$$

Consideriamo il primo risultato (per l'altro valgono analoghe considerazioni.

Per averne una interpretazione geometrica, supponiamo che la funzione sia positiva. Fissiamo un valore $\bar{x} \in [\,a\,,\,b\,]$: questo determina un segmento verticale nel rettangolo R . Il piano verticale che passa per questo segmento seziona il grafico della funzione nella curva di equazione z = f ($\bar{x}$, y) e il cilindroide in una regione piana di area data dall'integrale $\int_c^d f(\bar{x},y)\,dx$. Ripetendo la costruzione per ogni x∈ [a , b], si ottiene una funzione A (x) che raccoglie tutte queste aree: l'integrale $\int_a^b A(x)\,dx$ ricostruisce il volume del cilindroide.



Nel caso banale di una funzione costante f (x , y) = k il cilindroide è un parallelepipedo di base il rettangolo e altezza k (nel caso k > 0). La curva z = f ($\bar{x}$, y) è un segmento e il relativo sottografico un rettangolo di base [c , d] e altezza k , e dunque di area k (d – c). La funzione A (x) è dunque costante e il suo integrale sull'intervallo [a , b] vale k (d – c) (b – a), che è appunto il volume del parallelepipedo.

dimostrazione 1 : continuità della funzione A (x)

Facciamo vedere che è $\left|A(x) - A(\bar{x})\right| < \varepsilon$ per $\left|x - \bar{x}\right| < \delta_\varepsilon$. Questo prova che la funzione è continua; anzi, dato che δ_ε non dipende da $\bar{x}$, è uniformemente continua.

Innanzitutto si ha :

$$\left| \int_c^d (f (x , y) - f (\bar{x} , y)) \, dy \right| \leq \int_c^d \left| f (x , y) - f (\bar{x} , y) \right| dy .$$

Poiché f (x , y) è una funzione uniformemente continua nel rettangolo , si ha :

$$\forall \varepsilon > 0 , \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \left\| (x , y) - (x' , y') \right\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| f (x , y) - f (x' , y') \right| < \varepsilon .$$

Ma

$$\left\| (x , y) - (\bar{x} , y) \right\| = | x - \bar{x} |$$

e dunque

$$| x - \bar{x} | < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| f (x , y) - f (x' , y') \right| < \varepsilon$$

da cui

$$| x - \bar{x} | < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| A (x) - A (\bar{x}) \right| < \varepsilon (d - c) .$$

dimostrazione 2 : formula di riduzione

Consideriamo la funzione $A (x) = \int_c^d f (x , y) \, dy$: abbiamo visto che è continua nell'intervallo [a , b] e dunque integrabile. Dividiamo l'intervallo in n segmenti I_1 …. I_n , che possiamo supporre della stessa lunghezza.

$$\int_a^b A (x) \, dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{I_k} A (x) \, dx .$$

Applicando il teorema della media integrale in ogni sottointervallo:

$$= \sum_{k=1}^{n} A (\bar{x}_k) \, (b - a) / n = (b - a) / n \sum_{k=1}^{n} A (\bar{x}_k)$$

$$= \quad (b-a)/n \sum_{k=1}^{n} \int_{c}^{d} f(\bar{x}_k, y)\, dy \quad .$$

Dividiamo l'intervallo [c , d] in n sottointervalli di uguale lunghezza : J_1 …. J_n .

$$= \ (b-a)/n \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{h=1}^{n} \int_{J_h} f(\bar{x}_k, y)\, dy \right)$$

Applicando di nuovo il teorema della media integrale:

$$= \ (b-a)/n \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{h=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_{kh}) \ (d-c)/n \right)$$

$$= \ (b-a)(d-c)/n^2 \sum_{h,k} f(\bar{x}_k, \bar{y}_{kh}) .$$

Indicando con S_n e s_n le somme integrali di f (x , y) associate alla partizione del rettangolo sopra effettuata, il risultato precedente prova che $s_n \le \int_a^b A(x)\, dx \le S_n$.

Poiché S_n , $s_n \to \iint_R f(x, y)\, dx\, dy$, necessariamente $\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b A(x)\, dx$.

1.3 Integrale su insiemi più generali

Se A non è un rettangolo, ma un generico dominio (dominio = chiusura di un aperto) **limitato** del piano, un'idea naturale per definire l'integrale di una funzione f (x , y) su A è quella di considerare un rettangolo R che contiene A, prolungare la funzione ponendola uguale a 0 fuori di A e integrare sul rettangolo la funzione così ottenuta.

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in A \\ 0 & \text{se } (x, y) \in R - A \end{cases}$$

f integrabile su A $\Leftrightarrow$ f* integrabile su R

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R f^*(x,y)\,dx\,dy$$

Si può dimostrare che l'integrabilità e l'eventuale valore dell'integrale non dipendono dalla scelta del rettangolo.

Però, anche se f è continua in A, in generale f* risulta discontinua in R (tranne il caso in cui f è nulla sulla frontiera di A). Pertanto, senza fare qualche ipotesi sul dominio A, non è ovvia nemmeno l'integrabilità delle funzioni continue.

Procedendo in modo analogo a quanto avviene per le funzioni di una variabile, una condizione sufficiente a garantire l'integrabilità è che la frontiera di A sia un insieme di misura nulla secondo Peano-Jordan.

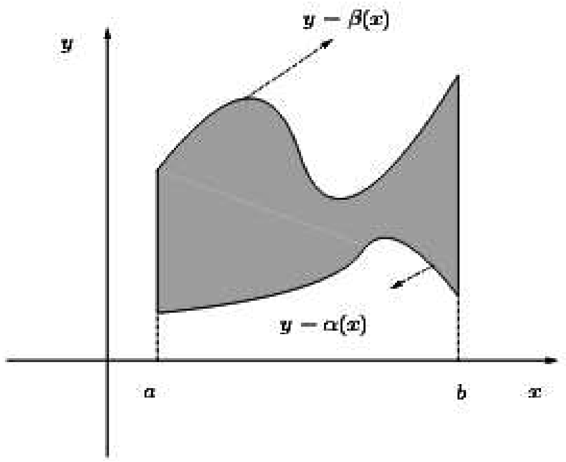
Gli insiemi normali (o semplici) rispetto ad un asse verificano questa condizione.

Definizione

Un insieme D del piano si dice **normale rispetto all'asse x** o y-semplice se è del tipo:

$$\{(x,y): x\in[a,b],\ \alpha(x)\le y\le\beta(x)\}$$

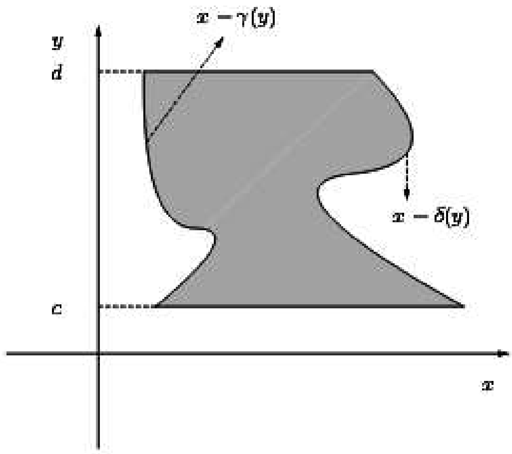
con α (x) , β (x) funzioni continue in [a , b].



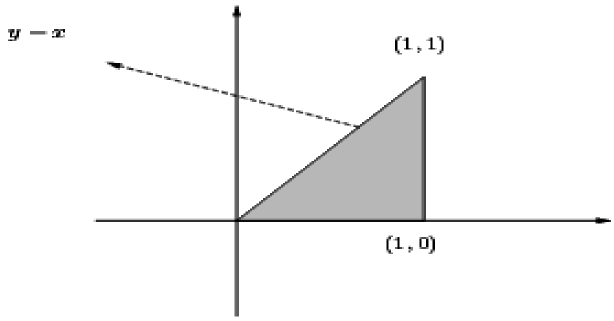
Un insieme D del piano si dice **normale rispetto all'asse y** o x-semplice se è del tipo:

$$\{(x,y): y\in[c,d],\ \gamma(y)\le x\le\delta(y)\}$$

con γ (y) , δ (y) funzioni continue in [c , d].



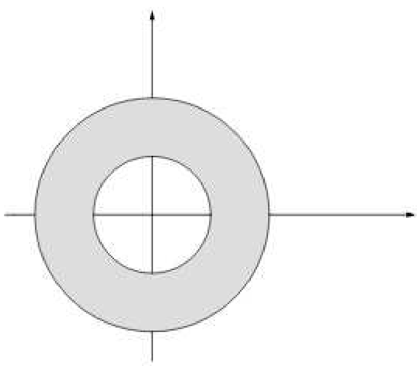
Un insieme può essere normale rispetto ad entrambi gli assi. Ad esempio, il triangolo in figura

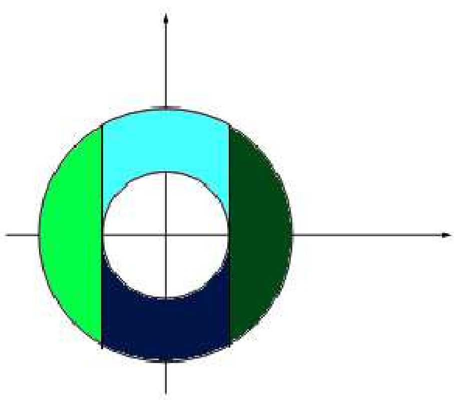


può essere descritto nelle due forme :

(i) $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x$ (ii) $0 \le y \le 1$, $y \le x \le 1$.

Altri insiemi non sono normali rispetto a nessuno dei due assi. Ad esempio la corona circolare in figura, che però si può scomporre in un numero finito di insiemi normali che si intersecano a due solo su segmenti (che hanno misura nulla). Nella figura successiva è mostrata una possibile scomposizione in domini normali rispetto all'asse x. L'integrale può essere calcolato come somma degli integrali su questi sottoinsiemi.





1.4 Gli insiemi normali hanno frontiera di misura nulla secondo Peano - Jordan

dimostrazione

Consideriamo un insieme normale rispetto all'asse x (per i domini dell'altro tipo le considerazioni sono analoghe).

I due lati verticali hanno misura nulla: ciascuno dei due è contenuto nel rettangolo che ha altezza pari alla lunghezza h del segmento e base $\varepsilon / 2h$ (e dunque area $\varepsilon / 2 < \varepsilon$).

Consideriamo poi una delle due curve, ad esempio quella inferiore (ovviamente valgono le stesse considerazioni per l'altra curva). Poiché $\alpha(x)$ è continua in $[a, b]$, è anche uniformemente continua:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0 : |x' - x''| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |\alpha(x') - \alpha(x'')| < \varepsilon .$$

Fissato $\varepsilon>0$, dividiamo $[a,b]$ in n intervalli I_k di ampiezza Δ_k minore di δ_ε, indichiamo con M_k e m_k rispettivamente il massimo e il minimo della funzione f nell'intervallo I_k, consideriamo infine i rettangoli $R_k = I_k \times [m_k, M_k]$. Otteniamo in questo modo un ricoprimento della curva $y = \alpha(x)$ con un numero finito di rettangoli. Poiché area $R_k = (M_k - m_k)\Delta_k < \varepsilon\ \delta_\varepsilon$, la somma delle aree è minore di $n\varepsilon\ \delta_\varepsilon$ e quindi minore di $\varepsilon\ (b - a)$. Questo termina la dimostrazione.

Osservazione: se nella stima finale sulla somma delle aree dei rettangoli vogliamo ottenere esattamente ε, basta partire dalla costante di uniforma continuità $\delta_{\varepsilon/(b-a)}$ associata ad $\varepsilon / (b - a)$ invece che a quella associata ad ε.

1.5 La formula di riduzione per domini normali

- Se $f(x, y)$ è una funzione continua su un dominio normale rispetto all'asse y, vale la seguente formula di riduzione (con le notazioni precedentemente introdotte):

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\ dy .$$

- Se $f(x, y)$ è una funzione continua su un dominio normale rispetto all'asse x, vale la seguente formula di riduzione (con le notazioni precedentemente introdotte):

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y)\ dx .$$

Dimostrazione nel caso di dominio normale rispetto all'asse delle x

Dato il dominio D = $\{ (x, y) : x \in [a, b],\ \alpha(x) \le y \le \beta(x) \}$ normale rispetto all'asse x, racchiudiamolo in un rettangolo R = [a , b] X [c , d] . Sia f* la funzione introdotta in 1.3 come prolungamento di f al rettangolo con valore nullo. Dalla definizione di integrale su un dominio e dalla formula di riduzione dell'integrale su un rettangolo, si ottiene successivamente:

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_R f^*(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_c^d f^*(x, y)\, dy =$$

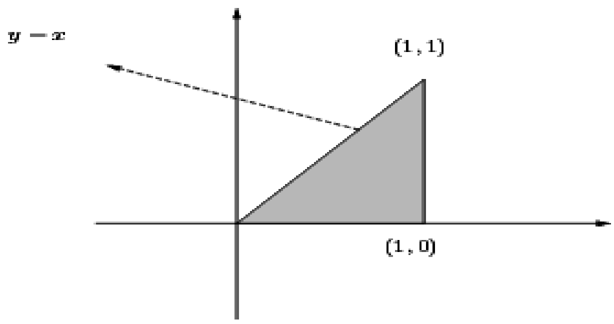
$$= \int_a^b dx \left(\int_c^{\alpha(x)} f^*(x, y)\, dy + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f^*(x, y)\, dy + \int_{\beta(x)}^{d} f^*(x, y)\, dy \right)$$

$$= \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\, dy \ .$$

L'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che negli intervalli [c , α (x)] e [β (x) , d] la funzione f* è nulla, mentre nell'intervallo [α (x) , β (x)] coincide con f.

Esempio 1

Integriamo la funzione f (x , y) nel triangolo indicato in figura



Vedendo il dominio come normale rispetto all'asse y, si ha :

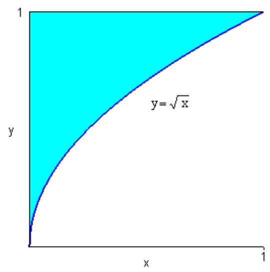
$$\iint_D x\, y\, dx\, dy = \int_0^1 dx \int_0^x x\, y\, dy = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^3\, dx = \frac{1}{8} \ .$$

Se invece il dominio come normale rispetto all'asse x, si ha :

$$\iint_D x\, y\, dx\, dy = \int_0^1 dy \int_y^1 x\, y\, dx = \int_0^1 y \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=y}^{1} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 y\,(1 - y^2)\, dx = \frac{1}{8} \ .$$

Esempio 2

Integriamo la funzione f (x , y) = exp (y^3) nel dominio indicato nella figura:



Vedendo il dominio come normale rispetto all'asse x, dobbiamo calcolare :

$$\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 \exp(y^3)\, dy \ .$$

Il procedimento non può essere portato avanti, perché non possiamo scrivere in forma elementare le primitive della funzione exp (y^3) , che ci servono invece per calcolare l'integrale in y.

Se invece interpretiamo il dominio come normale rispetto all'asse y, si ha :

$$\int_0^1 \exp(y^3)\, dy \int_0^{y^2} dx = \int_0^1 y^2 \exp(y^3)\, dy = \left[\frac{\exp(y^3)}{3} \right]_0^1 = (e-1)/3.$$

1.6 Proprietà elementari dell'integrale doppio per funzioni continue su un dominio normale

Valgono le stesse proprietà viste per l'integrale in una variabile:

- linearità
- positività e monotonia rispetto alla funzione
- monotonia rispetto al dominio per funzioni positive
- additività rispetto al dominio
- teorema della media integrale .
- la nozione di integrale doppio permette non solo di misurare il volume di un sottografico, ma anche l'area di una regione piana (l'integrale della funzione costantemente uguale a 1).

1.7 Cambiamento di variabili in un integrale doppio

Per funzioni di una variabile il metodo di integrazione per sostituzione si esprime nella forma:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

dove φ è una funzione da [c , d] ad [a , b] invertibile, di classe C^1 insieme all'inversa.

In particolare φ è una funzione monotòna,

Se è crescente , $\varphi^{-1}(a) = c$, $\varphi^{-1}(d) = d$ e φ' è positiva.

Se è decrescente , $\varphi^{-1}(a) = d$, $\varphi^{-1}(d) = c$ e φ' è negativa. In questo caso i due estremi di integrazione non sono messi nell'ordine corretto: li possiamo scambiare, cambiando però di segno all'integrale. Questo cambio di segno si può effettuare dentro il segno di integrale, facendolo intervenire su φ'.

Riassumendo i due risultati, possiamo scrivere:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(\varphi(t))\,\left|\varphi'(t)\right|\,dt\,.$$

Negli integrali doppi il procedimento analogo consiste nell'effettuare una trasformazione di coordinate nel piano:

$\varphi : E \rightarrow D$

$(x , y) = \varphi(u , v)$ ovvero $x = \varphi_1(u , v)$, $y = \varphi_2(u , v)$

invertibile e di classe C^1 insieme all'inversa. Dire che la funzione <u>a valori vettoriali</u> φ è di classe C^1 significa che tali sono le sue componenti φ_1 , φ_2 . L'invertibilità basta che sia verificata a meno di un insieme di misura nulla.

Con il cambiamento di variabile, il dominio di integrazione D diventa E, mentre la funzione da integrare $f(x , y)$ diventa $f(\varphi(u , v))$.

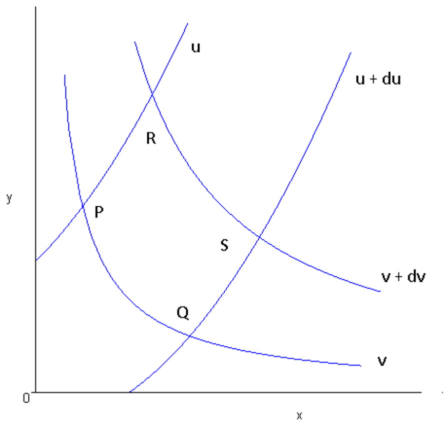
Rimane da capire qual è per gli integrali doppi l'analogo della formula $dx = \varphi'(t)\,dt$.

Questa si può interpretare come il modo in cui l'elemento infinitesimo di lunghezza cambia per effetto della trasformazione $x = \varphi(t)$.

L'intervallo [t , t + dt] si trasforma nell'intervallo [x , x + dx] , con $x = \varphi(t)$ e $x + dx = \varphi(t + dt)$. A meno di infinitesimi di ordine superiore a dt (dunque trascurabili rispetto ad esso), $\varphi(t + dt)$ si può approssimare con $\varphi(t) + \varphi'(t)\,dt$. Questo porta al risultato richiesto: $dx = \varphi'(t)\,dt$.

Nel caso bidimensionale dobbiamo capire come si trasforma "l'elemento di area".

Il "rettangolo infinitesimo" del piano u,v compreso tra u, u+du e v, v+dv viene trasformato nel piano x,y in "dominio infinitesimo" che può essere approssimato con il parallelogramma che ha i due lati adiacenti PQ e PR. Essendo:



$P = \varphi(u, v)$

$Q = \varphi(u + du, v)$

$R = \varphi(u, v + dv)$

possiamo approssimare PQ con $\varphi_u(u, v)\,du$ e PR con $\varphi_v(u, v)\,dv$; a sua volta l'area del dominio può essere approssimata con $\| PQ \times PR \|$ e quindi con $\| \varphi_u \times \varphi_v \|\, du\, dv$. Poiché :

$$\varphi_u \times \varphi_v = \det \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \varphi_{1u} & \varphi_{2u} & 0 \\ \varphi_{1v} & \varphi_{2v} & 0 \end{pmatrix} = (\varphi_{1u}\, \varphi_{2v} - \varphi_{2u}\, \varphi_{1v})\, \mathbf{k}$$

è dunque

$$\| \varphi_u \times \varphi_v \| = | \varphi_{1u}\, \varphi_{2v} - \varphi_{2u}\, \varphi_{1v} |.$$

Alla matrice

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_{1u} & \varphi_{1v} \\ \varphi_{2u} & \varphi_{2v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$$

si dà il nome di matrice Jacobiana della funzione φ che determina il cambiamento di variabili.

Si è dunque trovato che è

$$dx\, dy = | \det J_\varphi |\, du\, dv$$

e la formula di cambiamento di variabili in un integrale doppio assume la forma:

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_E f(\varphi(u, v)) \left| \det J_\varphi \right| du\, dv,$$

Un esempio di cambiamento di variabile particolarmente importante è il **passaggio a coordinate polari**:

$x = r \cos \vartheta$, $y = r \operatorname{sen} \vartheta$.

Poiché

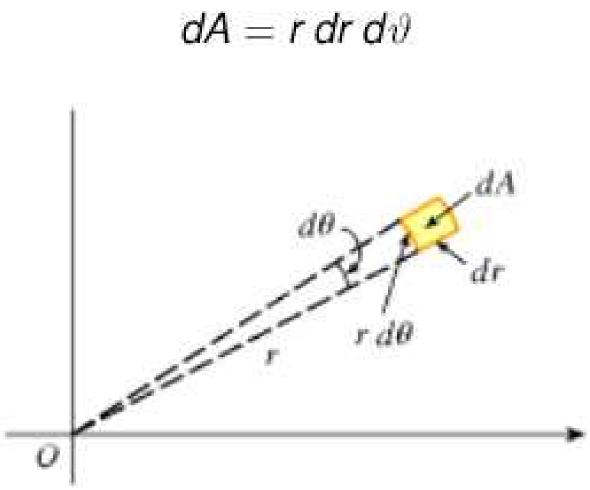
$$J_\varphi = \begin{pmatrix} x_r & x_\vartheta \\ y_r & y_\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -r \operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & r\cos\vartheta \end{pmatrix} \qquad \det J_\varphi = r ,$$

si ha dunque $dx\, dy = r\, dr\, d\vartheta$.

D'altra parte l'area del quadrilatero in figura si ottiene come differenza tra due settori circolari (l'area di un settore di raggio R e apertura α è $\alpha R^2 / 2$); dunque:

$$dx\, dy = [(r + dr)^2 - r^2]\, d\vartheta / 2 = r\, dr\, d\vartheta$$

se trascuriamo l'infinitesimo dr^2 di ordine superiore rispetto a dr.



2. Integrali tripli

I risultati validi per gli integrali doppi si estendono a dimensione superiore, cioè a funzioni di più variabili. Qui ci occuperemo solo degli integrali tripli.

Per l'integrale di una funzione f (x , y , z) non possiamo ripetere l'interpretazione geometrica vista per l'integrale doppio, dato che adesso il grafico della funzione è un sottoinsieme di R^4.

Un modo di interpretare il nuovo integrale può essere quello di pensare alla funzione come ad una densità di massa distribuita in un solido che occupa una regione D dello spazio; in questa prospettiva l'integrale misura la massa totale del solido.

In particolare, l'integrale $\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ indica la massa di un solido con densità costante unitaria; ma poiché in questo caso δ = M/V = 1 , l'integrale misura anche il volume del solido.

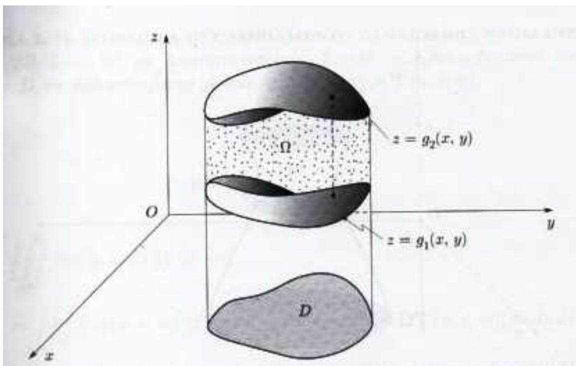
Per arrivare alla definizione dell'integrale triplo, i rettangoli [a , b] X [c , d] del piano sono sostituiti dai parallelepipedi $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ dello spazio; per il resto si procede come per gli integrali doppi, arrivando a definire l'integrale di una funzione continua su un parallelepipedo. Per quanto riguarda l'estensione ad un dominio D più generale ma ancora limitato, si considera un parallelepipedo che contiene D e si prolunga la funzione definendola uguale a 0 fuori di D. Anche in questo caso le discontinuità che si creano sulla frontiera di D sono inessenziali se tale frontiera ha misura nulla (e la definizione di misura nulla ripete quella data nel piano, se solo sostituiamo i rettangoli con i parallelepipedi). Si può dimostrare che questo accade se il dominio è normale rispetto ad un asse.

Ad esempio, un dominio limitato normale rispetto all'asse z si rappresenta nella forma:

$$\{ (x,y,z) : (x,y) \in A,\ g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y) \}$$

dove g_1 e g_2 sono due funzioni continue in A ed A è un dominio regolare del piano (cioè un dominio su cui si può calcolare un integrale doppio).

2.1 Formula di riduzione per fili



- si fissa un punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$ e si considera il segmento verticale (filo) costituito dai punti $(\bar{x}, \bar{y}, t)$ con $g_1(\bar{x}, \bar{y}) \le t \le g_2(\bar{x}, \bar{y})$
- si integra la funzione sul filo rispetto alla variabile z
- ripetendo il calcolo per tutti i punti di A, si trova una funzione F (x , y)
- si calcola l'integrale doppio di F (x , y) in A.

In definitiva:

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_A \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dx\, dy$$

che più comunemente si scrive :

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_A dx\, dy \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\ .$$

Esempio

Calcolare il volume della regione situata nel primo ottante e compresa trai cilindri di equazione $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + z^2 = 1$.

La funzione da integrare è costante uguale ad 1 e il dominio di integrazione è individuato dalle condizioni:

$x^2 + y^2 \le 1$, $x^2 + z^2 \le 1$, x, y, z ≥ 0,

che possiamo riscrivere nella forma

$0 \le z \le \sqrt{1 - x^2}$, $x^2 + y^2 \le 1$, x, y ≥ 0

(la condizione $1 - x^2 \ge 0$ che dà significato alla radice è superflua, in quanto contenuta nelle altre).

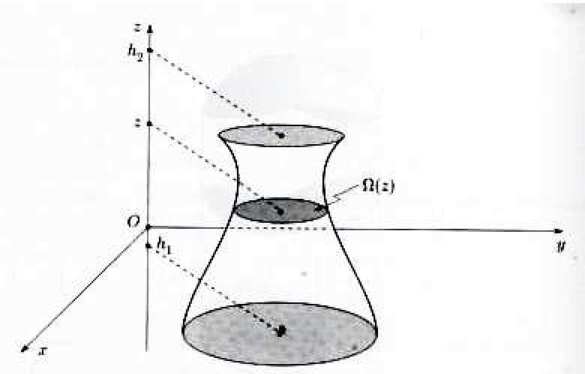
Così scritto, il dominio appare normale rispetto all'asse z; l'integrale da calcolare diventa:

$$\iint_A dx\, dy \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dz = \iint_A \sqrt{1 - x^2}\ dx\, dy\,.$$

Essendo il dominio A normale , ad esempio rispetto all'asse x , possiamo ulteriormente scrivere:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy = \int_0^1 (1-x^2)\, dx = 2/3 .$$

2.2 Formula di riduzione per sezioni



- si fissa un valore $\bar{z}$ che sia compreso tra h_1 e h_2 , rispettivamente la quota minima e massima dei punti del dominio D
- si interseca D con il piano orizzontale di quota $\bar{z}$, ottenendo la sezione $\Omega(\bar{z})$
- si integra la funzione f (x , y , $\bar{z}$) in $\Omega(\bar{z})$ (integrale doppio; si sa calcolare se $\Omega(\bar{z})$ è un dominio regolare)
- si ripete il calcolo per tutti i valori di z, ottenendo una funzione G (z)
- si integra G (z) in [h_1 , h_2].

In definitiva:

$$\iiint_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_{h_1}^{h_2} \left(\iint_A f(x,y,z)\, dx\, dy \right) dz$$

che più comunemente si scrive:

$$\iiint_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_{h_1}^{h_2} dz \iint_A f(x,y,z)\, dx\, dy .$$

Esempio 1 (quello visto nel paragrafo precedente, ma svolto con altro metodo)

Calcolare il volume della regione situata nel primo ottante e compresa trai cilindri di equazione $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + z^2 = 1$.

La funzione da integrare è costante uguale ad 1 e il dominio di integrazione è individuato dalle condizioni:

$x^2 + y^2 \le 1$, $x^2 + z^2 \le 1$, $x, y, z \ge 0$,

che possiamo riscrivere nella forma

$0 \le z \le 1$, $0 \le x \le \sqrt{1-z^2}$, $0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$.

La formula di riduzione diventa:

$$\int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy = \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \sqrt{1-x^2}\, dx \quad .$$

Il calcolo può essere portato avanti, ma con difficoltà maggiori di quelle viste con il metodo precedente. Questo prova che da un punto di vista pratico la scelta tra un metodo o l'altro non è indifferente.

Esempio 2

$$\iiint_D \sqrt{|z|}\, dx\, dy\, dz$$

D : $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$, $x , y \ge 0$, $|z| \le ½$

Possiamo scrivere D nella forma:

$-1/2 \le z \le ½$, $x^2 + y^2 \le 1 - z^2$, $x , y \ge 0$

e dunque si ottiene

$$\int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{|z|} \iint_C dx\, dy \, .$$

C è il quarto di cerchio di centro l'origine e raggio $\sqrt{1-z^2}$; l'integrale doppio misura l'area di C e dunque vale $\pi \,(1 - z^2) / 4$.

Rimane da calcolare

$$\frac{\pi}{4} \int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{|z|}\,(1-z^2)\, dz = \frac{\pi}{2} \int_0^{1/2} \sqrt{z}\,(1-z^2)\, dz \, .$$

Si procede con il cambiamento di variabile $t = \sqrt{z}$.

2.3 Cambiamento di variabili in un integrale triplo

Vale un risultato analogo a quello visto per gli integrali doppi:

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_E f(\varphi(u, v, w)) \left| \det J_\varphi \right| du\, dv\, dw$$

essendo

$\varphi : E \to D$

$(x, y, z) = \varphi(u, v)$ ovvero $x = \varphi_1(u, v, w)$, $y = \varphi_2(u, v, w)$, $z = \varphi_3(u, v, w)$

invertibile e di classe C^1 insieme all'inversa.

J_φ indica la matrice jacobiana della trasformazione:

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_{1u} & \varphi_{1v} & \varphi_{1w} \\ \varphi_{2u} & \varphi_{2v} & \varphi_{2w} \\ \varphi_{3u} & \varphi_{3v} & \varphi_{3w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix}$$

Esempio 1 : passaggio a coordinate cilindriche

$\varphi(r, \vartheta, z) = (r\cos\vartheta,\ r\,\mathrm{sen}\vartheta,\ z)$

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -r\,\mathrm{sen}\vartheta & 0 \\ \cos\vartheta & r\cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det J_\varphi = r$$

Esempio 2 : passaggio a coordinate polari

$\varphi(r, \varphi, \vartheta) = (r\,\mathrm{sen}\varphi\cos\vartheta,\ r\,\mathrm{sen}\varphi\cos\vartheta,\ r\cos\varphi)$

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} \mathrm{sen}\,\varphi\cos\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta & -r\,\mathrm{sen}\,\varphi\ \mathrm{sen}\,\vartheta \\ \mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\vartheta & r\cos\varphi\,\mathrm{sen}\vartheta & r\,\mathrm{sen}\,\varphi\ \cos\vartheta \\ \cos\varphi & -r\,\mathrm{sen}\,\varphi & 0 \end{pmatrix} \qquad \det J_\varphi = r^2\,\mathrm{sen}\varphi\, dr\, d\varphi\, d\vartheta\ .$$