COMPLEMENTI SUI CAMPI CONSERVATIVI

A lezione è stato dimostrato che, dato un campo vettoriale F continuo definito in un connesso D di R^n, se è conservativo allora :

- Il lavoro L non dipende dalla traiettoria ma solo dagli estremi.
  In particolare, se U è un potenziale e se A e B sono gli estremi della curva,è L = U (B) – U (A).

- Il lavoro su una traiettoria curva è nullo.

Qui vogliamo provare che queste proprietà sono anche sufficienti a garantire che il campo sia conservativo.

1. Se il lavoro del campo vettoriale non dipende dalla traiettoria ma solo dagli estremi, allora il campo è conservativo.
2. Se il lavoro del campo vettoriale sulle traiettorie chiuse è nullo, allora il campo è conservativo.

Dimostrazione 1.

Dobbiamo provare che esiste una funzione scalare U (X) tale che F = grad U.

Fissato $X_0 \in$ D, per ogni x $\in$ D scegliamo una curva di classe C^1 (o C^1 a tratti) che abbia per estremi X_0 ed X (esiste perché D è connesso). Per ipotesi il lavoro del campo dipende solo dai due estremi, e dunque solo da X perché X_0 è fisso. Questo lavoro definisce dunque una funzione U (X): vogliamo provare che grad U = F.

Scriviamo il rapporto incrementale nella direzione i-esima: $\dfrac{U(X + h E_i) - U(X)}{h}$.

Il termine U (X + h E_i) è il lavoro su una qualunque traiettoria tra X_0 ed X + h E_i : possiamo scegliere la curva che va da X_0 ad X già utilizzata per calcolare U (X) e poi spostarci da X ad X + h E_i in modo rettilineo. Il numeratore del rapporto incrementale è dunque il lavoro su tale tratto rettilineo , parametrizzato da φ (t) = X + t h E_i con t $\in$ [0 , 1]; possiamo dunque riscrivere il numeratore nella forma

$$\int_0^1 F(X + t\,h\,E_i)\,.\;h\,E_i\;\;dt \;=\; h\int_0^1 F_i\,(X + t\,h\,E_i)\,dt\;\;.$$

Con il cambiamento di variabile s = th (e dunque ds = h dt) , l'integrale diventa:

$$\int_0^h F_i\,(X + s\,E_i)\,dt\;\;.$$

Abbiamo dunque ottenuto

$$\frac{U(X+hE_i)-U(X)}{h} = \frac{\int_0^h F_i(X+sE_i)\,dt}{h}.$$

Il termine a destra è la media integrale della funzione F (X + s E_i) nell'intervallo [0 , h] e può essere riscritto nella forma $F_i(X+\bar{s}E_i)$, con $\bar{s} \in$ (0 , h) . Poiché per h →0 è anche $\bar{s}$ →0 , in definitiva

$$\lim_{h\to 0} \frac{U(X+hE_i)-U(X)}{h} = F_i(X)$$

che è quanto si voleva dimostrare.

Dimostrazione 2.

Tenendo conto di quanto dimostrato al punto precedente, basta far vedere che il lavoro del campo non dipende dalla traiettoria ma solo dagli estremi.

Fissati due punti A,B nel dominio (connesso) del campo vettoriale, siano Υ_1 e Υ_2 due curve da A a B: dobbiamo provare che il lavoro su Υ_1 e quello su Υ_2 hanno lo stesso valore, cioè che $L_{\Upsilon 1} = L_{\Upsilon 2}$, ovvero $L_{\Upsilon 1} - L_{\Upsilon 2} = 0$, ovvero ancora $L_{\Upsilon 1} + L_{-\Upsilon 2} = 0$, indicando con $-\Upsilon_2$ la curva Υ_2 cambiata di orientamento. Per l'additività del lavoro, questa somma è il lavoro sulla curva che va da A a B lungo Υ_1 e da B ad A lungo $-\Upsilon_2$; poiché questa curva è chiusa, il lavoro è nullo per l'ipotesi fatta. Questo conclude la dimostrazione.