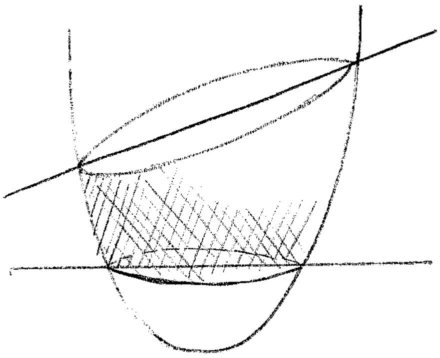
1.



$$\iint_S \operatorname{rot} F\cdot N \, dS = \int_{\partial S^+} F\cdot T \, ds$$

$\operatorname{rot} F = (0, 2, 0)$

- Calcolo del flusso

Sulla base inferiore

$$\begin{cases} z = 1 \\ z \geq x^2+y^2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = r\cos t \\ y = r \operatorname{sen} t \\ z = 1 \end{cases} \qquad r\in[0,1] \quad t\in[0,2\pi]$$

$\varphi_r = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$
$\varphi_t = (-r \operatorname{sen} t, r\cos t, 0)$
$\varphi_r \wedge \varphi_t = (0,0,r)$ la normale è orientata verso l'interno; possiamo utilizzare la parametrizzazione scelta, ma dobbiamo cambiare di segno il risultato che troveremo.

$\operatorname{rot} F\cdot(\varphi_r\wedge\varphi_t) = 0$

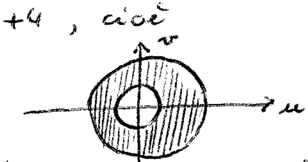
Il flusso è nullo

Sulla superficie laterale

$$\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ 1 \leq z \leq x+4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2+v^2 \end{cases}$$

con $1 \leq u^2+v^2 \leq u+4$, cioè

$$\begin{cases} u^2+v^2 \geq 1 \\ (u-\frac{1}{2})^2+v^2 \leq \frac{17}{4} \end{cases}$$



D dominio simmetrico rispetto asse u

$\varphi_u = (1,0,2u)$
$\varphi_v = (0,1,2v)$
$\varphi_u\wedge\varphi_v = (-2u,-2v,1)$
$\operatorname{rot} F\cdot(\varphi_u\wedge\varphi_v) = -4v$

La funzione $-4v$ è dispari in v; il suo integrale in un dominio simmetrico rispetto all'asse u è nullo. Dunque il flusso è nullo. Anche in questo caso il fatto che si debba cambiare di segno (perché la parametrizzazione non è quella "corretta") è inessenziale.

- Calcolo della circuitazione

$$\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ z = x+4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = x+4 \\ (x-\frac{1}{2})^2+y^2 = \frac{17}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{17}}{2}\cos t \\ y = \frac{\sqrt{17}}{2}\operatorname{sen} t \\ z = \frac{9}{2}+\frac{\sqrt{17}}{2}\cos t \end{cases} \qquad t\in[0,2\pi]$$

$\varphi' = \left(-\frac{\sqrt{17}}{2}\operatorname{sen} t, \frac{\sqrt{17}}{2}\cos t, -\frac{\sqrt{17}}{2}\operatorname{sen} t\right)$

$F\cdot\varphi' = -2\sqrt{17}\operatorname{sen} t$

$$\int_0^{2\pi} -2\sqrt{17}\operatorname{sen} t\, dt = 0.$$

2.

$x \in \mathbb{R}$
$y \in [-1,1]$

$B'_y = -y/\sqrt{1-y^2}$ non è limitata nell'intorno di 1 e -1. Non vale il teorema di Cauchy.

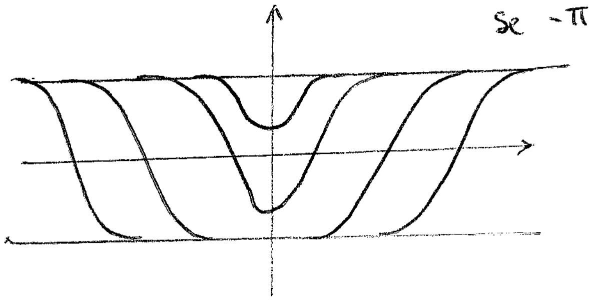
Slz. costanti : $y = \pm 1$

Separando le variabili e integrando :

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int x\,dx \rightarrow \arcsin y = \frac{x^2+c}{2}$$

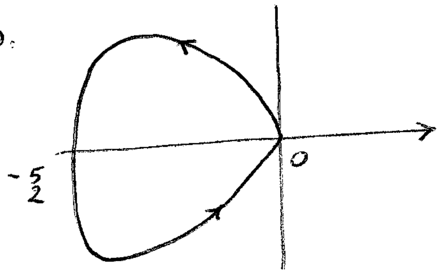
$$y = \operatorname{sen}\left(\frac{x^2+c}{2}\right)$$

purchè $-\frac{\pi}{2} < \frac{x^2+c}{2} < \frac{\pi}{2}$, cioè $-\pi - c < x^2 < \pi - c$.
Perchè abbia senso, deve essere $c \leq \pi$.
Se $c \leq -\pi$: $\sqrt{-\pi-c} \leq |x| \leq \sqrt{\pi-c}$
Se $-\pi \leq c \leq \pi$: $|x| \leq \sqrt{\pi-c}$



Le soluzioni si saldano con quelle costanti; quindi in ogni caso l'intervallo massimale di definizione è $\mathbb{R}$.

3.



$\varphi' = (10(2t-1),\ 2\pi\cos 2\pi t)$

La prima componente si annulla solo per $t = 1/2$; per tale valore la seconda componente è diversa da 0.

$\varphi(0) = \varphi(1) = (0,0)$
$\varphi'(0) = (-10, 2\pi)$, $\varphi'(1) = (10, 2\pi)$
Nell'origine è presente un punto angoloso.
Per $t = \frac{1}{2}$, la prima componente è nulla: punto a tangente verticale.

$10(s^2-s) = 10(t^2-t) \Leftrightarrow s^2-t^2 = s-t \Leftrightarrow s = t$ opp. $s+t=1$.
Se $s = 1-t$, $\operatorname{sen} 2\pi s = \operatorname{sen} 2\pi t \Leftrightarrow -\operatorname{sen} 2\pi t = \operatorname{sen} 2\pi t$ che vale solo se $t=0$ o $t=1$ (agli estremi, dunque), oppure se $t = \frac{1}{2}$. Ma in questo caso è anche $s = \frac{1}{2}$ e dunque ancora $s = t$.
In conclusione $\varphi(s) = \varphi(t)$ se e solo se $s = t$, oppure agli estremi.

$$\text{Area} = -\int_0^1 y(t)\,x'(t)\,dt = -\int_0^1 \operatorname{sen} 2\pi t\,(20t-10)\,dt =$$

$$= -20\int_0^1 t \operatorname{sen} 2\pi t\,dt + 10\int_0^1 \operatorname{sen} 2\pi t\,dt =$$

$$= -20\int_0^1 t\operatorname{sen} 2\pi t\,dt = -20\left\{-t\frac{\cos 2\pi t}{2\pi} + \int_0^1 \frac{\cos 2\pi t}{2\pi}\,dt\right\}$$

$$= \frac{10}{\pi}\left[t\cos 2\pi t\right]_0^1 = \frac{10}{\pi}.$$

4.

Il campo è definito in $\mathbb{R}^3$, che è semplicemente connesso; dunque basta imporre che sia irrotazionale per ottenere che sia conservativo.
Questo accade quando

$$2ye^{-z} = -\beta ye^{-z}, \quad 2x\cos\pi y = \pi A x\cos\pi y$$

cioè per

$$\beta = -2, \quad A = 2/\pi.$$

Per tali valori, cerchiamo il potenziale U.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = Ax\,\mathrm{sen}\,\pi y \quad\rightarrow\quad U = \frac{1}{2}Ax^2\,\mathrm{sen}\,\pi y + c(y,z) = \frac{1}{\pi}x^2\,\mathrm{sen}\,\pi y + c(y,z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2\cancel{\cos\pi y} + c'_y = x^2\cancel{\cos\pi y} + \beta e^{-z}y \quad\Rightarrow\quad c(y,z) = -y^2e^{-z} + c(z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \cancel{y^2e^{-z}} + c'(z) = \cancel{y^2e^{-z}} \quad\rightarrow\quad c = \text{costante}$$

$$U = \frac{x^2}{2}\,\mathrm{sen}\,\pi y - y^2e^{-z} + c.$$

Per calcolare il lavoro richiesto, basta trovare la differenza di potenziale agli estremi:

$$U(1,\tfrac{1}{2},2) - U(0,0,0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4e^2}.$$

V