Soluzioni

1.

C.E. dell'equazione: $x, y \neq 0$.
Tenendo conto della condizione iniziale, si studia l'eq. per $x>0$, $y<0$.
In questa regione f, f'_y sono continue e dunque il teorema di Cauchy assicura l'esistenza di una ed una sola soluzione locale.
Posto $y = xz$ (e dunque $y' = z + xz'$), l'equazione diventa

$$z' = 2\sqrt{4+z^2}\,/\,xz$$

e la condizione iniziale

$$z(e) = -2\sqrt{3}.$$

L'eq. è a variabili separate. Procedendo come di consueto:

$$\int \frac{z\,dz}{2\sqrt{4+z^2}} = \int \frac{dx}{x} \iff \frac{1}{2}\sqrt{4+z^2} = \lg kx \quad (k>0).$$

Imponendo la condizione iniziale, si trova $k = e$.

$$\frac{1}{2}\sqrt{4+z^2} = \lg ex \iff \sqrt{4+z^2} = \lg(e^2x^2) \Rightarrow$$

$$4 + z^2 = \lg^2(e^2x^2) \iff z = -\sqrt{\lg^2(e^2x^2) - 4}.$$

La soluzione è definita per le x t.c.

$$\begin{cases} x > 0 \\ \lg^2(e^2x^2) > 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ e^2x^2 > e^2 \text{ opp. } e^2x^2 < e^{-2} \end{cases} \iff \begin{cases} x > 1 \\ \text{opp} \\ 0 < x < e^{-2} \end{cases}$$

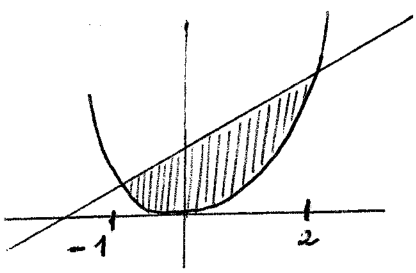
Tenendo conto della condizione iniziale:

$$z = -\sqrt{\lg^2(e^2x^2) - 4}, \quad 0 < x < e^{-2}$$

e dunque

$$y = -x\sqrt{\lg^2(e^2x^2) - 4}, \quad 0 < x < e^{-2}.$$

2.



Area:

$$\int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\,dx = \frac{9}{2}$$

Con la formula di G.G. $\iint_D dx\,dy = \int_{\partial D^+} x\,dy$ si ottiene:

l'arco di parabola si parametrizza con $x = t$, $y = t^2$ ($t \in [-1,2]$) il segmento con $x = t$, $y = t+2$ ($t \in [-1,2]$) che però è orientato in senso opposto a quello richiesto. Dunque

$$A = \int_{-1}^{2} t \cdot 2t\,dt - \int_{-1}^{2} t \cdot 1\,dt = \frac{9}{2}.$$

Come superficie dello spazio, D si parametrizza nella forma:
$x = u$, $y = v$, $z = 0$, con $u \in [-1,2]$, $v \in [u^2, u+2]$.

Si ha:

$$\varphi_u = (1,0,0),\ \varphi_v = (0,1,0) \rightarrow \varphi_u \wedge \varphi_v = \underline{k}$$

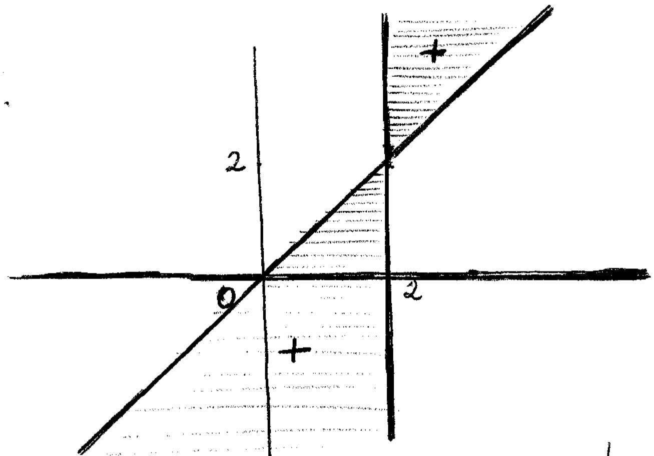
$\mathrm{rot}\, F = (z, 0, y)$.

$$\Phi = \iint_D \mathrm{rot} F \cdot N \, dS = \int_{-1}^{2} du \int_{u^2}^{u+2} v \, dv = \frac{1}{2} \int_{-1}^{2} ((u+2)^2 - u^4)\, du =$$
$$= \frac{1}{2} \left[\frac{(u+2)^3}{3} - \frac{u^5}{5} \right]_{-1}^{2} = \frac{36}{5}.$$

Il teorema di Stokes afferma che tale flusso è la circuitazione di F attorno a ∂D^+ (di cui abbiamo già scritto la parametrizzazione):

$$\Phi = \int_{-1}^{2} (t, t^3, 0) \cdot (1, 2t, 0)\, dt - \int_{-1}^{2} (t, t^2 + 2t, 0) \cdot (1,1,0)\, dt =$$
$$= \int_{-1}^{2} (t + 2t^4)\, dt - \int_{-1}^{2} (t^2 + 3t)\, dt = \left[\frac{2}{5} t^5 - \frac{1}{3} t^3 - t^2 \right]_{-1}^{2} = \frac{36}{5}$$

3.



$$f(x,y) = y^2 (y - x)(x - 2)$$

Il limite all'∞ non esiste; basta - ad esempio - studiarlo per la restrizione all'asse y:
$f(0,y) = y^3$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 (y - 2x + 2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = y (x-2)(3y - 2x).$$

Punti stazionari:

(1) i punti dell'asse x.
Tenendo conto che su questi punti la funzione si annulla e osservando il segno della funzione, si ottiene che sono di massimo quelli con $x < 0$ o $x > 2$, di minimo quelli con $0 < x < 2$, di sella $(0,0)$, $(2,0)$.

(2) il punto $(2,2)$, di sella (tenendo conto che in questo punto la funzione si annulla e osservando il segno della funzione)

(3) il punto $(\frac{3}{2}, 1)$, che è di massimo.

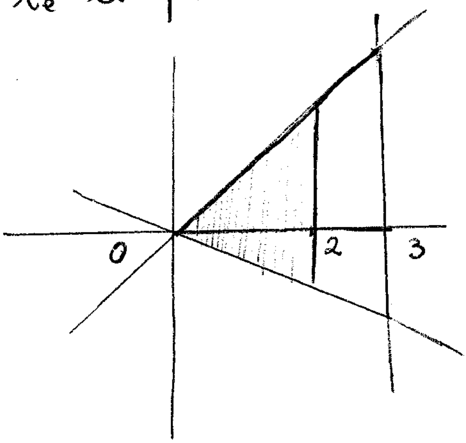
Questo risultato si può ricavare dalla matrice hessiana

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} -2y^2 & 3y^2-4xy+4y \\ 3y^2-4xy+4y & 6xy-2x^2+4x-12y \end{pmatrix}$$

che nel punto diventa

$$\mathcal{H}\left(\tfrac{3}{2},1\right) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3/2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} a_{11} < 0 \\ \Delta > 0. \end{matrix}$$

Più semplicemente: il punto è interno al triangolo di vertici $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$ (vedi figura). La funzione è positiva all'interno, nulla sulla frontiera: il valore massimo su questo compatto (esiste per il t. di Weierstrass) cade in un punto interno e dunque deve essere un punto stazionario, necessariamente il punto considerato.



L'insieme dato è il triangolo in figura.

- L'unico punto stazionario interno è $\left(\frac{3}{2},1\right)$ e la funzione in questo punto vale $1/4$.
- Sul lato obliquo superiore la fz. è nulla.
- Sul lato verticale la funzione diventa $\varphi(y) = y^2(y-3)$, con $y \in [-1,3]$. Il valore minimo è -4 (in $(3,-1)$, $(3,2)$) quello massimo è 0 (in $(3,0)$, $(3,3)$).
- Sul lato obliquo inferiore: $\varphi(x) = \frac{4}{27}x^3(2-x)$, con $x \in [0,3]$. Il valore minimo è -4 (assunto in $(3,-1)$), quello massimo è $1/4$ (assunto in $(3/2, -1/2)$).

In conclusione:

$\max f = \frac{1}{4}$ assunto in $\left(\frac{3}{2},1\right)$, $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$

$\min f = -4$ assunto in $(3,-1)$, $(3,2)$.